Введение в анализ. Дифференциальное и интегральное исчисление

А.Я.Казаков Н.В.Аверина Е.Н.Дроздова Е.М.Кайнарова

1 Оглавление

1. Введение
2. Основные структуры
2.1 Элементы теории множеств
2.2 Операции с множествами
2.3 Функции и способы их задания
2.4 Числовые последовательности
3. Пределы
3.1 Предел последовательности
3.1.1 Определения
3.1.2 Арифметика пределов
3.1.3 Арифметика бесконечно малых
3.1.4 Признаки существования пределов
3.1.5 Вычисление пределов
3.1.6 Замечательный предел
3.2 Функции непрерывной переменной
3.2.1 Определения
3.2.2 Арифметика пределов
3.2.3 Арифметика бесконечно малых
3.2.4 Признаки существования пределов
3.2.5 Замечательные пределы
3.2.6 Список важнейших предельных соотношений
3.3 Непрерывные функции
3.3.1 Определения
3.3.2 Основные свойства
3.3.3 Разрывы функции
4 Производная, дифференциальное исчисление
4.1 Производная
4.1.1 Определение производной
4.1.2 Производные от элементарных функций
4.1.3 Производные от суммы, произведения и частного функций
4.1.4 Производные от сложной функции, от обратной функции, от функции, заданной параметрически
4.1.5 Таблица производных
4.2 Первый дифференциал
4.2.1 Определение и основные свойства первого дифференциала

4.2.2 Геометрический смысл первого дифференциала
4.2.3 Дифференциал сложной функции. Инвариантность первого дифференциала
4.3 Свойства дифференцируемых функций
4.4 Правило Лопиталя и раскрытие неопреленностей
5 Высшие производные
5.1 Определение и свойства высших производных
5.2 Определение и свойства дифференциалов высших порядков
5.3 Теорема Тейлора
5.4 Формула Тейлора для некоторых функций
6 Приложения дифференциального исчисления
6.1 Монотонность функции и знак ее производной
6.2 Достаточное условие локального максимума /минимума
6.3 Решение задачи о глобальном максимуме/минимуме функции на замкнутом отрезке
6.4 Выпуклость вверх, выпуклость вниз, точки перегиба
7 Первообразная (неопределенный интеграл)
7.1 Определение и основные свойства
7.2 Таблица основных производных
7.3 Интегрирование по частям
7.4 Замена переменной в первообразной
8 Техника вычисления первообразных
8.1 Интегралы от дробно-рациональных функций
8.1.1 Полиномы, основные свойства
8.1.2 Дробно-рациональные функции, основные свойства
8.1.3 Выделение целой части и разложение на простейшие для дробно-рациональных функций
8.1.4 Вычисление первообразной от дробно-рациональной функции
8.2 Интегралы от тригонометрических функций
8.3 Интегралы от функций, содержащих иррациональности
8.4 Подстановки Эйлера
8.5 "Неберущиеся"интегралы
9 Определенный интеграл
9.1 Определение
9.2 Геометрический смысл определенного интеграла
9.3 Основные свойства
9.4 Формула Ньютона-Лейбница
9.4.1 Интеграл как функция верхнего предела
9.4.2 Формула Барроу
9.4.3 Формула Ньютона-Лейбница
9.5 Интегрирование по частям в определенном интеграле
9.6 Замена переменной в определенном интеграле
10 Несобственные интегралы
10.1 Несобственные интегралы 1 рода
10.1.1 Определение и основные свойства
10.1.2 Признаки сходимости несобственных интегралов 1 рода
10.2 Несобственные интегралы 2 рода
10.2.1 Определение и основные свойства
10.2.2 Признаки сходимости несобственных интегралов 2 рода
11. Интегралы, зависящие от параметра
12 Приложения определенных интегралов

12.1 Площадь плоских фигур
12.2 Длина дуги кривой
12.3 Вычисление объема тел
12.4 Приложения в механике

2 Введение

В данном учебном пособии представлены начала анализа, область математики, имеющая важные приложения в естествознании и инженерии. Целью этого пособия является сжатое изложение основных сюжетов этой области математики, достаточное для уверенного владения предметом. Изложение теоретических материалов сопровождается соответствующими задачами и разбором примеров. Основной текст пособия не включает доказательства теорем, разбор примеров, задачи, контрольные вопросы. Их можно открыть и ознакомиться с ними в отдельном окне, если у читателя возникнет такое желание. Более развернутое обсуждение предлагаемых здесь глав математики можно найти в хорошо известных учебниках анализа, часть которых приведена здесь.

Н.С.Пискунов. Дифференциальное и интегральное исчисление. Т.1. СПб, МИФРИЛ, 1996.

Г.М.Фихтенгольц. Основы математического анализа, т.1. М., "Наука 1962.

Л.Д.Кудрявцев. Курс математического анализа. М., Дрофа, 2003.

Д.Т.Письменный. Конспект лекций по высшей математике. М., 2009,

Имеется большое число задачников по математическому анализу и связанным с ним вопросам. Упомянем здесь

Г.Н.Берман. Сборник задач по курсу математического анализа. СПб., "Профессия 2005.

Б.П.Демидович. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. М. Изд-во Моск. университета, 1997.

3 Основные структуры

3.1 Элементы теории множеств

Определение. Набор некоторого количества элементов называется **множеством**.

Примеры.

1. Множество букв латинского алфавита.
2. Множество цифр.
3. Пустое множество (обозначается $\emptyset$).

Запись $a \in A$ означает, что a является элементом A, $a \notin A$ означает, что a не является элементом A. Выражение $B \subset A$ означает, что B является подмножеством A - все элементы B являются одновременно элементами A.

Множество можно задать перечислением его элементов, заданием элементов с помощью описания их свойств и т.д.

3.2 Операции с множествами

1. **Объединение** множеств A и B. Множество, состоящее из элементов, входящих хотя бы в одно из множеств A или B. Обозначается $C = A \bigcup B$.

2. **Пересечение** множеств A и B. Множество, состоящее из общих элементов множеств A и B. Обозначается $C = A \bigcap B$.

3. Обычно предполагается, что все множества являются подмножествами более широкого множества $\mathbb{Z}$ (например, отрезки на вещестенной оси являются подмножествами вещественной оси). В связи с этим вводится еще одна операция с множествами. Пусть $A \subset \mathbb{Z}$, тогда $\overline{A}$ - множество, содержащее те и только те элементы $\mathbb{Z}$, которые не являются элементами A. $\overline{A}$ называют дополнением A.

Эти операции обладают набором свойств, которые нетрудно проверить. Приведем здесь некоторые из них.

1. $A \bigcup A = A, \quad A \bigcap A = A.$
2. $(A \bigcup B) \bigcap C = (A \bigcap C) \bigcup (B \bigcap C).$
3. $A \bigcup (B \bigcap C) = (A \bigcup B) \bigcap (A \bigcup C).$

Для того, чтобы сравнивать множества по числу элементов, вводится понятие эквивалентности.

Определение. Если каждому элементу множества A поставлен в соответствие единственный элемент множества B, причем каждому элементу B соответствует единственный элемент множества A, то говорят, что между A и B установлено взаимно-однозначное соответствие. При этом множества A и B называют эквивалентными.

Примеры.

1. Множество целых чисел эквивалентно множеству отрицательных целых чисел.
2. Множество целых чисел эквивалентно множеству четных положительных чисел.
3. Отрезок $[0, 1]$ эквивалентен отрезку $[0, 1/2]$.

Определение. Множество, эквивалентное множеству натуральных чисел, называется **счетным** множеством.

Примеры.

1. Любое бесконечное подмножество множества счетных чисел является счетным.
2. Множество рациональных чисел счетно.
3. Объединение конечной или счетной совокупности счетных множеств счетно.

Теорема Кантора. Множество точек отрезка $[0, 1]$ несчетно.

Замечание. В основном в дальнейшем речь пойдет о подмножествах вещественной оси, которую мы в дальнейшем обозначаем $\mathbb{R}$. Мы не будем излагать строгую теорию вещественных чисел. Такую теорию можно найти в более продвинутых учебниках, например, в учебнике анализа Фихтенгольца. Для нас будет достаточно "школьное"представление вещественных чисел как точек оси (вещественной оси) или как чисел, представимых десятичными дробями (возможно, с бесконечной мантиссой). При этом мы будем использовать такие "интуитивно ясные"свойства вещественной оси, как ее "плотность "непрерывность"и т.д.

3.3 Функции и способы их задания

Определение. Числовой **функцией** $f(x)$ мы будем называть отображение некоторого подмножества A вещественной оси на некоторое подмножество B вещественной оси. A при этом называется областью определения, B - областью значений функции $f(x)$.

Функция может быть задана явной формулой, таблицей, графическим образом или словесным описанием.

Обратная функция. Если отображение $f(x)$ взаимно-однозначно, то можно каждому элементу $y \in B$ поставить в соответствие тот элемент $x \in A$, который переводится в y отображением $f(x)$. Построенное отображение называется обратной функцией, она обозначается $x = f^{-1}(y)$. Таким образом, согласно определению, $x = f^{-1}(f(x))$, $y = f(f^{-1}(y))$.

Сложная функция. Пусть заданы числовые функции $y = f(x) : A \to B$, $z = g(y) : B \to C$. Тогда можно рассмотреть отображение $A \to C$, которое вычисляется следующим образом: $z = g(f(x))$. Эта числовая функция называется суперпозицией функций $f(x)$ и $g(y)$ или сложной функцией. Иногда такая функция обозначается $z = (g \circ f)(x)$.

Элементарные функции. Приведем список элементарных функций. Предполагается знакомство с ними в рамках школьного курса математики, так что читателю известны их области определения и области значений.

1. Степенная функция $y = x^\gamma$.
2. Показательная функция $y = a^x$.
3. Логарифмическая функция $y = log_a(x)$.
4. Тригонометрические функции $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$, $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$.
5. **Многочлены** (полиномы). Функции вида

$$y = P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n.$$

Числа $a_0, a_1, a_2, ..., a_n$ называются коэффициентами многочлена. В многочлене присутствуют только целые неотрицательные степени переменной x, причем имеется конечное число слагаемых.

6. **Дробно-рациональные функции**. Функции вида

$$y = R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

где $P(x), Q(x)$ - многочлены переменной x.

Задачи.

1. В круговой конус высоты H с радиусом основания R вписан цилиндр (образующая цилиндра при этом полагается параллельной оси конуса). Определить площадь боковой поверхности и объем цилиндра как функции радиуса цилиндра r. Найти области определения этих функций.

2. Пусть функция $f(x)$ имеет областью определения интервал $(0, 1)$. Найти области определения функций $f(x^2)$, $f(\sin x)$, $f(\ln x)$.

3. Показать, что суперпозиция двух дробно-линейных функций

$$f(x) = \frac{a_1 x + b_1}{a_2 x + b_2}, \quad x = \phi(t) = \frac{c_1 t + d_1}{c_2 t + d_2}$$

является дробно-линейной функцией и найти выражение для ее коэффициентов.

4. Найти обратные функции и построить их графики для функций

а)

$$f(x) = \frac{8 + x^3}{8 - x^3}$$

.

б)

$$f(x) = \sqrt{x - 4}$$

.

3.4 Числовые последовательности

Определение. Числовая функция, заданная на множестве натуральных чисел $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$ называется **последовательностью**.

Обозначение. Функцию $a(n), n \in \mathbb{N}$ обозначают a_n.

Примеры. $a_n = (-1)^n$, $a_n = \sin^2 n$.

Определение. Последовательность называется монотонно возрастающей, если $a_n < a_{n+1}$ при $n \in \mathbb{N}$. Соответственно, монотонно убывающей, монотонно невозрастающей, монотонно неубывающей ($a_n > a_{n+1}$, $a_n \geq a_{n+1}$, $a_n \leq a_{n+1}$ при $n \in \mathbb{N}$).

Определение. Последовательность называется ограниченной, если существует константа $M > 0$ такая, что $|a_n| < M$ при $n \in \mathbb{N}$. Соответственно, ограниченной сверху, ограниченной снизу ($a_n < M$, $a_n > -M$ при $n \in \mathbb{N}$).

4 Пределы. Непрерывные функции

Изучение пределов - способ исследовать локальное поведение функции в окрестности некоторой точки. Мы начнем с обсуждения пределов последовательностей. У области определения последовательности - множества $\mathbb{N}$ - есть только одна точка, подлежащая обсуждению - бесконечно удаленная точка. У функций, заданных на подмножестве вещественной оси $\mathbb{R}$, таких точек в области определения "много".

4.1 Предел последовательности

4.1.1 Определения

Определение. Конечное число A называется **пределом** последовательности a_n, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ такое, что при $n > N(\varepsilon)$ выполняется: $|a_n - A| < \varepsilon$.

Обозначение. Этот факт обозначают

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = A,$$

или

$$a_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} A.$$

Пример. Покажем, следуя определению предела, что

$$\frac{1}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$$

Возьмем произвольное значение $\varepsilon > 0$. Тогда при $n > N = \varepsilon^{-1}$ получим: $0 < 1/n < 1/N = \varepsilon$. Это означает, что при $n > N$ имеет место $|1/n - 0| < \varepsilon$.

Не все последовательности имеют предел. Например, можно проверить, что последовательность $a_n = (-1)^n$ не имеет предела.

Контрольный вопрос. Докажите последний факт.

Определение. Говорят, что последовательность a_n имеет пределом $+\infty$, если для любого $A > 0$ существует такое N, что при всех $n > N$ выполняется неравенство $a_n > A$.

Обозначение. Этот факт обозначают

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = +\infty,$$

или

$$a_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty.$$

Аналогично определяется ситуация, когда $\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty$.

Определение. Если предел последовательности равен 0, последовательность называют **бесконечно малой**. Если предел последовательности равен ∞, последовательность называют **бесконечно большой**.

Теорема. Пусть последовательность a_n имеет конечный предел. Тогда a_n - ограниченная последовательность.

Доказательство. Возьмем какое-нибудь $\varepsilon > 0$. Согласно определению предела, существует такое N, что при всех $n > N$ выполняется $|a_n - A| < \varepsilon$, или $A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon$. Пусть $M = max\{|a_1|, |a_2|, ..., |a_N|, |A-\varepsilon|, |A+\varepsilon|\}$. Тогда для всех n выполняется: $|a_n| \le M$. ч.т.д.

Теорема. Пусть последовательность a_n имеет конечный предел A,

$$a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} A.$$

Тогда последовательность $b_n = (a_n - A)$ является бесконечно малой.

Теорема. Последовательность может иметь только один предел.

Доказательство. Предположим, что последовательность имеет два предела,

$$a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} A,$$

$$a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} B,$$

$A \ne B$. Будем для определенности считать, что числа A и B конечные. Возьмем $\varepsilon = |A-B|/3$. Согласно определению предела, найдется такое N_1, что при $n > N_1$ выполняется $A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon$. По тем же причинам найдется N_2 такое, что при $n > N_2$ выполняется $B - \varepsilon < a_n < B + \varepsilon$. Тогда при $n > max(N_1, N_2)$ выполняются оба набора неравенств, что невозможно - отрезки $(A - \varepsilon, A + \varepsilon)$, $(B - \varepsilon, B + \varepsilon)$ не пересекаются. ч.т.д.

4.1.2 Арифметика пределов

Здесь приведена серия теорем, описывающая предел суммы, произведения и частного последовательностей, имеющих конечный предел.

Теорема. Пусть

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = A, \lim_{n\to+\infty} b_n = B,$$

причем A и B - конечные числа. Тогда последовательность $(a_n + b_n)$ имеет конечный предел, причем

$$\lim_{n\to+\infty} (a_n + b_n) = A + B.$$

Доказательство. Возьмем произвольное число $\varepsilon > 0$. Согласно определению предела, существует такое N_1, что при всех $n > N_1$ выполняется:

$$|a_n - A| < \varepsilon/2. \tag{1}$$

По тем же причинам существует такое N_2, что при всех $n > N_2$ выполняется:

$$|b_n - B| < \varepsilon/2. \tag{2}$$

Пусть $N = max(N_1, N_2)$. Тогда при всех $n > N$ выполняются неравенства (1) и (2). Используя неравенство треугольника, получаем: при всех $n > N$ выполняется

$$|(a_n + b_n) - (A + B)| < |a_n - A| + |b_n - B| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon. \tag{3}$$

ч.т.д.

Теорема. Пусть
$$\lim_{n\to+\infty} a_n = A,\ \lim_{n\to+\infty} b_n = B,$$
причем A и B - конечные числа. Тогда последовательность $(a_n \cdot b_n)$ имеет конечный предел, причем
$$\lim_{n\to+\infty}(a_n \cdot b_n) = A \cdot B.$$

Теорема. Пусть
$$\lim_{n\to+\infty} a_n = A,\ \lim_{n\to+\infty} b_n = B,$$
причем A и B - конечные числа, $B \neq 0$. Тогда последовательность (a_n/b_n) имеет конечный предел, причем
$$\lim_{n\to+\infty}(a_n/b_n) = A/B.$$

Теорема. Пусть при всех n выполняется $a_n < M$ для какого-то числа $M < \infty$, причем последовательность a_n имеет конечный предел,
$$\lim_{n\to+\infty} a_n = A.$$
Тогда $A \leq M$ (переход в неравенствах к пределу).

Замечание. Разумеется, существуют аналоги этих теорем и в том случае, когда один из пределов (или оба предела) бесконечен.

Контрольный вопрос. Сформулируйте теорему о пределе суммы, если одна из последовательностей имеет конечный предел, вторая - бесконечный.

4.1.3 Арифметика бесконечно малых

Теорема. Пусть a_n, b_n - бесконечно малые при $n \to +\infty$. Тогда $(a_n + b_n)$ - бесконечно малая при $n \to +\infty$.

Теорема. Пусть a_n - бесконечно малая при $n \to +\infty$, b_n - ограниченная последовательность. Тогда $a_n \cdot b_n$ - бесконечно малая при $n \to +\infty$.

Теорема. Пусть a_n - бесконечно малая при $n \to +\infty$,
$$\lim_{n\to+\infty} b_n = B,$$
причем B - конечное число, $B \neq 0$. Тогда последовательность (a_n/b_n) бесконечно малая при $n \to +\infty$.

Определение. Бесконечно малые a_n, b_n называются **эквивалентными**, если существует предел
$$\lim_{n\to+\infty} a_n/b_n = \theta,$$
причем $\theta \neq 0$, $\theta \neq \pm\infty$. Этот факт обозначают следующим образом: $a_n \sim b_n$ при $n \to +\infty$.

4.1.4 Признаки существования пределов

Следующие теоремы указывают условия, при которых последовательность имеет предел.

Теорема. Пусть a_n - монотонно возрастающая последовательность, ограниченная сверху. Тогда она имеет конечный предел.

Следствие. Если a_n - монотонно возрастающая последовательность, она имеет пределом либо $= +\infty$, либо конечное число.

Соответственно, для монотонно убывающей последовательности.

Теорема. Пусть a_n - монотонно убывающая последовательность, ограниченная снизу. Тогда она имеет конечный предел.

Теорема. Пусть для всех n выполняются неравенства $a_n \leq b_n \leq c_n$, и

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = A, \lim_{n\to+\infty} c_n = A.$$

Тогда b_n также имеет предел, причем

$$\lim_{n\to+\infty} b_n = A.$$

Критерий Коши. Для того, чтобы последовательность a_n имела конечный предел, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовало такое N, что при всех $m, n > N$ выполнялось $|a_n - a_m| < \varepsilon$.

4.1.5 Вычисление пределов

Здесь мы приведем несколько примеров вычисления пределов последовательностей. При этом мы используем приведенные выше теоремы об арифметике пределов.

1.

$$a_n = (n+1)^2/n^2.$$

Напомним, что $1/n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, так что $1/n^2 = 1/n \cdot 1/n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Итого

$$a_n = \frac{n^2+2n+1}{n^2} = 1 + 2\cdot\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$$

2.

$$a_n = \frac{2n^3 - 100n^2 + 1}{100n^2 - 23n}.$$

Выделяем в числителе и знаменателе старшие степени переменной n, стремящейся к $+\infty$:

$$a_n = \frac{n^3(2 - 100\frac{1}{n} + \frac{1}{n^3})}{n^2(100 - 23\frac{1}{n})} = n \cdot \frac{(2 - 100\frac{1}{n} + \frac{1}{n^3})}{(100 - 23\frac{1}{n})}.$$

Скобка в числителе имеет пределом при $n \to +\infty$ число 2, скобка в знаменателе имеет пределом число 100. Множитель n стремится к $+\infty$, так что в итоге имеем:

$$a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty.$$

3.

$$a_n = \sqrt{n^2+6n+1} - \sqrt{n^2+2n-4}.$$

Умножим числитель и знаменатель этого выражения на "сопряженное"выражение,

$$a_n = \frac{(\sqrt{n^2+6n+1} - \sqrt{n^2+2n-4})(\sqrt{n^2+6n+1} + \sqrt{n^2+2n-4})}{\sqrt{n^2+6n+1} + \sqrt{n^2+2n-4}} =$$

$$\frac{n^2+6n+1-(n^2+2n-4)}{\sqrt{n^2+6n+1} + \sqrt{n^2+2n-4}} = \frac{4n+5}{\sqrt{n^2+6n+1} + \sqrt{n^2+2n-4}}.$$

Затем выносим старшую степень n в числителе и в знаменателе,

$$a_n = \frac{n(4+\frac{5}{n})}{n(\sqrt{1+\frac{6}{n}+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1+\frac{2}{n}-\frac{4}{n^2}})} = \frac{4+\frac{5}{n}}{\sqrt{1+\frac{6}{n}+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1+\frac{2}{n}-\frac{4}{n^2}}}.$$

Предел числителя равен 4, предел знаменателя равен 2. В итоге находим:

$$a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2.$$

Задачи. Вычислить пределы a_n при $n \to +\infty$.

1.
$$a_n = \frac{(2n^3-3n+1)^{1/3}}{2n-7}.$$

2.
$$a_n = \frac{(20n^2+3)^{1/3}}{2n+5}.$$

3.
$$a_n = \frac{(n+1)^3-(n-1)^3}{n^2+7n+1}.$$

4.
$$a_n = \frac{(n+2)!-n!}{(n+1)!}.$$

5.
$$a_n = \frac{(n^5+1)^{1/3}-(n^2+5)^{1/2}}{(n^4+3)^{1/2}-2}.$$

6.
$$a_n = \frac{1+2+3+...+n}{n+1} - \frac{n+1}{2}$$

4.1.6 Замечательный предел

Теорема.

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e, \qquad (4)$$

где e- конечное число, $e = 2.71828...$ (это число e служит основанием натуральных логарифмов).

Доказательство. Мы покажем, что последовательность $a_n = (1+1/n)^n$ монотонно возрастает и ограничена сверху. Следовательно, она будет иметь конечный предел. Вычисление его значения можно провести более продвинутыми методами, которые будут обсуждаться в дальнейшем.

Раскроем скобки, используя бином Ньютона,

$$a_n = 1 + \frac{n}{1}\cdot\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{1}{n^3} + ... + \frac{n(n-1)(n-2)...2\cdot 1}{1\cdot 2\cdot 3...\cdot n}\cdot\frac{1}{n^n} =$$

$$1+1+\frac{1}{1\cdot 2}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+...$$

$$+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3...\cdot n}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)...\left(1-\frac{n-1}{n}\right).$$

Последняя сумма включает $n+1$ слагаемое. При увеличении n число слагаемых увеличивается. Каждый сомножитель в слагаемых суммы при увеличении n увеличивается. Таким образом, a_n монотонно увеличивается при увеличении n.

Далее, выбрасывая множители в скобках, каждый из которых меньше 1, получаем:

$$a_n < 1 + 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + ... + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 ... \cdot n}.$$

Заменяя каждый множитель в знаменателях, больший 2, на 2 (и увеличивая тем самым правую часть), получаем:

$$a_n < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 2} + ... + \frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 2 .... \cdot 2} < 1 + \frac{1 - 2^{-n}}{1 - 2^{-1}} < 3.$$

Здесь мы использовали формулу для суммы геометрической прогресси с показателем 2^{-1}. ч.т.д.

4.2 Функции непрерывной переменной

4.2.1 Определения

Здесь мы рассматриваем функции, заданные на подинтервале $[a,b] \subset \mathbb{R}$. В данном случае можно обсуждать локальное поведение функции в окрестности любой точки $x_0 \in [a,b]$, причем к точке можно приближаться разными способами; соответственно, имеется несколько определений **предела функции в точке**.

Определение. Множество $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ при $\varepsilon > 0$ называют окрестностью (или $\varepsilon-$окрестностью) точки x_0.

Определение. Конечное число A называется пределом $f(x)$ при $x \to x_0$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что при всех x, удовлетворяющих условию $|x - x_0| < \delta$ выполняется $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Обозначение. Этот факт обозначают следующим образом:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A,$$

или

$$f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} A.$$

Если мы приближаемся к интересующей нас точке слева, конструкцию следует соответствующим образом изменить.

Определение. Конечное число A называется **левым пределом** $f(x)$ при $x \to x_0$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что при всех x, удовлетворяющих условию $x_0 - \delta < x < x_0$ выполняется $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Обозначение. Этот факт обозначают следующим образом:

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = A,$$

или

$$f(x) \xrightarrow[x \to x_0 - 0]{} A.$$

Аналогичным образом вводится понятие предела справа, обозначается он

$$\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = A,$$

или

$$f(x) \xrightarrow[x \to x_0+0]{} A.$$

Контрольный вопрос. Сформулируйте определение правого предела.

Несколько изменяя формулировку бесконечного предела для последовательности, имеем

Определение. Говорят, что функция $f(x)$ имеет в точке $x_0 \in [a, b]$ предел $+\infty$, если для любого $A > 0$ существует такое $\delta > 0$, что при всех $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ выполняется неравенство $f(x) > A$.

Обозначение. Этот факт обозначают

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty,$$

или

$$f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} +\infty.$$

Далее следует определить левый бесконечный предел, правый бесконечный предел, ...

Контрольный вопрос. Какие еще могут быть предельные ситуации, требующие определения?

Определение. Если $f(x)$ имеет в точке x_0 предел, равный 0, функцию $f(x)$ называют бесконечно малой в точке $x = x_0$. Если $f(x)$ имеет в точке x_0 предел, равный $+\infty$, функцию $f(x)$ называют бесконечно большой в точке $x = x_0$.

Теорема. Пусть $f(x)$ имеет в точке x_0 предел A. Тогда функция $g(x) = f(x) - A$ является бесконечно малой в точке $x = x_0$.

Контрольный вопрос. Докажите эту теорему.

4.2.2 Арифметика пределов

Здесь приведена серия теорем, описывающая предел суммы, произведения и частного функций, имеющих в точке x_0 конечный предел. Их можно переписать и для случая левых пределов, правых пределов, предельная точка x_0 может быть конечной или бесконечной ($x_0 = \pm\infty$).

Теорема. Пусть

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A, \lim_{x \to x_0} g(x) = B,$$

причем A и B - конечные числа. Тогда функция $(f(x) + g(x))$ имеет в точке x_0 конечный предел, причем

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = A + B.$$

Доказательство. Возьмем произвольное число $\varepsilon > 0$. Согласно определению предела, существует такое $\delta_1 > 0$, что при всех $x \in (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1)$ выполняется:

$$|f(x) - A| < \varepsilon/2. \tag{5}$$

По тем же причинам существует такое $\delta_1 > 0$, что при всех $x \in (x_0 - \delta_2, x_0 + \delta_2)$ выполняется:

$$|g(x) - B| < \varepsilon/2. \tag{6}$$

Пусть $\delta = min(\delta_1, \delta_2)$. Тогда при всех $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ выполняются оба неравенства (5) и (6). Используя неравенство треугольника, получаем: при всех $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ выполняется

$$|(f(x) + g(x)) - (A + B)| < |f(x) - A| + |g(x) - B| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon. \tag{7}$$

ч.т.д.

Теорема. Пусть
$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A,\ \lim_{x\to x_0} g(x) = B,$$
причем A и B - конечные числа. Тогда функция $(f(x)\cdot g(x))$ имеет в точке x_0 конечный предел, причем
$$\lim_{x\to x_0} (f(x)\cdot g(x)) = A\cdot B.$$

Доказательство.

Теорема. Пусть
$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A,\ \lim_{x\to x_0} g(x) = B,$$
причем A и B - конечные числа, $B \neq 0$. Тогда функция $f(x)/g(x)$ имеет в точке x_0 конечный предел, причем
$$\lim_{x\to x_0} (f(x)/g(x)) = A/B.$$

Доказательство.

Теорема. Пусть выполняется неравенство $f(x) < M$ для всех x из некоторой окрестности точки x_0, причем существует конечный предел
$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A.$$
Тогда $A \leq M$ (переход к пределу в неравенствах).

Доказательство.

Замечание. Разумеется, существуют аналоги этих теорем и в том случае, когда один из пределов (или оба предела) бесконечен, а также для левых и правых пределов.

4.2.3 Арифметика бесконечно малых

Для функций непрерывного переменного также справедливы теоремы о бесконечно малых. Разумеется, для всех возможных вариантов - когда речь идет о пределе, левом пределе, правом пределе. При этом предельная точка x_0 может быть конечной или бесконечной ($x_0 = \pm\infty$).

Теорема. Пусть $f(x)$, $g(x)$ - бесконечно малые при $x \to x_0$. Тогда $(f(x) + g(x))$ - бесконечно малая при $x \to x_0$.

Доказательство.

Теорема. Пусть $f(x)$ - бесконечно малая при $x \to x_0$, $g(x)$ - ограниченная в окрестности $x = x_0$ функция. Тогда $f(x)\cdot g(x)$ - бесконечно малая при $x \to x_0$.

Доказательство.

Теорема. Пусть $f(x)$ - бесконечно малая при $x \to x_0$,
$$\lim_{x\to x_0} g(x) = B,$$
причем B - конечное число, $B \neq 0$. Тогда функция $(f(x)/g(x))$ бесконечно малая при $x \to x_0$.

Доказательство.

Определение. Бесконечно малые при $x \to x_0$ $f(x)$, $g(x)$ называются эквивалентными, если существует предел
$$\lim_{x\to x_0} f(x)/g(x) = \theta,$$
причем $\theta \neq 0$, $\theta \neq \pm\infty$. Этот факт обозначают следующим образом: $f(x) \sim g(x)$ при $x \to x_0$.

4.2.4 Признаки существования пределов

Следующие теоремы указывают условия, при которых функция имеет предел при $x \to x_0$.

Теорема. Пусть $f(x)$ - монотонно возрастающая функция, ограниченная сверху. Тогда она имеет конечный предел при $x \to x_0$.

Доказательство.

Следствие. Если $f(x)$ - монотонно возрастающая функция, она имеет пределом либо $+\infty$, либо конечное число.

Соответственно, для монотонно убывающей функции.

Теорема. Пусть $f(x)$ - монотонно убывающая функция, ограниченная снизу. Тогда она имеет конечный предел при $x \to x_0$.

Доказательство.

Теорема. Пусть для всех $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ для некоторого $\varepsilon > 0$ выполняются неравенства $f(x) \le g(x) \le h(x)$, и при $x \to x_0$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A, \ \lim_{x \to x_0} h(x) = A.$$

Тогда $g(x)$ также имеет предел при $x \to x_0$, причем

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = A.$$

Доказательство.

Критерий Коши. Для того, чтобы функция $f(x)$ имела конечный предел при $x \to x_0$, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовало такое δ, что при всех $x_1, x_2 \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ выполнялось $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.

4.2.5 Замечательные пределы

Здесь мы приведем основные предельные соотношения, возникающие при т.н. "раскрытии неопределенностей". Представленные ниже соотнрошения "раскрывают неопределенности"вида $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, 1^∞ и т.п. При этом предполагается, что аргумент функции x стремится к 0 или ∞. Это не ограничивает общности рассмотрений, потому что конечную точку $x = a$ можно заменой переменной $x = a + x'$ перевести в точку $x' = 0$, так что достаточно выписывать соотношения только для точки $x = 0$. Далее, по ходу доказательства предельных равенств мы будем использовать тот факт, что все элементарные функции ***непрерывны*** в своей области определения. Определение ***непрерывности*** мы дадим несколько позже, так что тут мы нарушаем последовательность изложения.

1. **Первый замечательный предел**.

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Доказательство. Это соотношение при x, пробегающих целые значения n, мы уже доказали. Пусть теперь x не целое. Найдем такое n, что $n < x < n + 1$, тогда можно написать очевидные неравенства:

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Понятно, что если $x \to +\infty$, то соответствующее n также стремится к $+\infty$. Далее,

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \cdot \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{-1}.$$

Первый сомножитель здесь имеет пределом при $n \to +\infty$ число e, второй - 1. Аналогично

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right).$$

И опять - первый сомножитель здесь имеет пределом при $n \to +\infty$ число e, второй - 1. В итоге приходим к нужному результату. ч.т.д.

2. **Логарфмический замечательный предел**.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

Замечание. В школьном курсе математики обсуждается функция $\log_a(x)$ - логарифм по основанию a. В случае, когда $a = e$, логарифм называется натуральным и обозначается $\ln x$.

Доказательство. Положим $y = x^{-1}$, тогда при $x \to 0$ имеем: $y \to \infty$. При этом

$$A = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{y\to\infty} \ln\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}.$$

Используя непрерывность логарифма, продолжаем:

$$A = \ln\left[\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}\right] = \ln e = 1.$$

ч.т.д.

3. **Показательный замечательный предел**.

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

Доказательство. Сделаем замену переменных $z = e^x - 1$. Тогда $x = \ln(1+z)$ и при $x \to 0$ имеем : $z \to 0$. В новых терминах переписываем наш замечательный предел:

$$\lim_{z\to 0} \frac{z}{\ln(1+z)}.$$

Этот предел уже вычислен - он равен 1. ч.т.д.

4. **Степенной замечательный предел**.

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha.$$

Доказательство. Положим $\ln(1+x) = x \cdot E_1(x)$, $(e^z - 1)z^{-1} = E_2(z)$, так что $e^z = 1 + zE_2(z)$. Как только что было показано,

$$E_1(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 1, \quad E_2(z) \xrightarrow[z\to 0]{} 1.$$

Тогда

$$(1+x)^\alpha = e^{\alpha x E_1(x)} = 1 + \alpha x E_1(x) \cdot E_2(\alpha x E_1(x)),$$

и

$$\frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha E_1(x) E_2(\alpha x E_1(x)) \xrightarrow[x\to 0]{} \alpha.$$

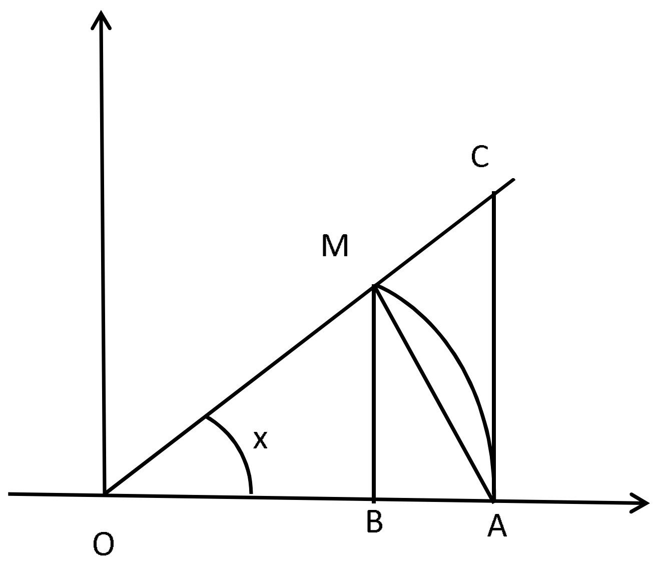

Рис. 1: К тригонометрическому замечательному пределу.

5. **Тригонометрический замечательный предел**.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

Доказательство. На картинке изображен круговой сектор MOA, радиус круга равен 1 (так что длина отрезков OM и OA равна 1), угол в вершине сектора равен x. Линия AC - касательная, треугольник $\triangle_{OCA}$ - прямоугольный. В сектор MOA вписан треугольник $\triangle_{OMA}$. Очевидно, что $\triangle_{OMA}\subset MOA\subset\triangle_{OCA}$, так что площади этих объектов удовлетворяют условию: $S_{\triangle_{OMA}}<S_{MOA}<S_{\triangle_{OCA}}$. Переведем теперь все это на язык формул. Треугольник $\triangle_{OMA}$ имеет сторону OM длины 1, на нее опущена высота длины $\sin x$, так что $S_{\triangle_{OMA}}=\sin x/2$. Трегольник $\triangle_{OCA}$ - прямоугольный, один катет OA имеет длину 1, второй CA имеет длину $\operatorname{tg} x$. Следовательно, $S_{\triangle_{OCA}}=\operatorname{tg} x/2$. Сектор MOA вырезан из круга радиуса 1, угол при вершине равен x, так что $S_{MOA}=x/2$. В итоге получаем неравенства:

$$(\sin x)/2<x/2<(\operatorname{tg} x)/2.$$

Или, деля на $\sin x$, переворачивая и убирая двойки,

$$\cos x<\frac{\sin x}{x}<1.$$

Известно, что $\cos x\to 1$ при $x\to 0$ (здесь мы используем непрерывность функции $\cos x$). Таким образом, левая и правая части последнего неравенства стремятся к 1 при $x\to 0$. Следовательно, и центральная функция имеет тот же предел. ч.т.д.

Эти результаты можно переписать в терминах эквивалентных бесконечно малых следующим образом: при $x\to 0$

1. $\ln(1+x)\sim x$,
2. $e^x-1\sim x$,
3. $(1+x)^\alpha-1\sim\alpha\cdot x$,
4. $\sin x\sim x$.

Эти соотношения существенно упрощают вычисление пределов.

Пример. Вычислим предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{(e^{3x}-1)\sin 5x}{\ln(1+2x)\cdot\sin 2x}.$$

Так как $x\to 0$, то $2x\to 0$, $3x\to 0$ и т.д. Таким образом, $e^{3x}-1\sim 3x$, $\sin 5x\sim 5x$, $\ln(1+2x)\sim 2x$, $\sin 2x\sim 2x$. Подставляя и сокращая одинаковые сомножители в числителе и знаменателе, находим:

$$\lim_{x\to 0}\frac{(e^{3x}-1)\sin 5x}{\ln(1+2x)\cdot\sin 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{3x\cdot 5x}{2x\cdot 2x}=\frac{15}{4}.$$

4.2.6 Список важнейших предельных соотношений

Имеется список основных предельных соотношений. Он фиксирует поведение основных элементарных функций, когда их аргумент стремится к бесконечности или 0.

1.

$$\lim_{x\to+\infty}a^x=\begin{array}{cc}\infty, & a>1,\\ 0, & 0<a<1.\end{array}$$

2.

$$\lim_{x\to-\infty}a^x=\begin{array}{cc}0, & 0<a<1\\ \infty, & a>1.\end{array}$$

3.

$$\lim_{x\to+\infty}\ln x=\infty.$$

4.

$$\lim_{x\to-\infty}\ln x=0.$$

5.

$$\lim_{x\to+\infty}x^b=\begin{array}{cc}\infty, & b>0,\\ 0, & 0<b<1.\end{array}$$

6.

$$\lim_{x\to+0}x^b=\begin{array}{cc}0, & b>0,\\ +\infty, & 0<b<1.\end{array}$$

7.

$$\lim_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{x}}=1.$$

8. Если $a>1$, то при любом b

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{a^x}{x^b}=+\infty.$$

9. Если $b>0$, то

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^b}{\ln x}=+\infty.$$

Два последних предельных отношения "сравнивают"между собой бесконечно большие при $x\to+\infty$ функции a^x, x^b, $\ln x$.

Примеры вычисления пределов. Приведем несколько примеров вычисления пределов.

1.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^6-x^3+2x}{2x^6-3}.$$

Выделяя в числителе и знаменателе старшую степень "большой"переменной x, получаем:

$$A=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^6(4-x^{-3}+2x^{-5})}{x^6(2-3x^{-6})}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(4-x^{-3}+2x^{-5})}{(2-3x^{-6})}=2.$$

2.

$$\lim_{x\to+0}\frac{\sqrt{1+2x}-\sqrt{1-3x}}{\sin 3x}.$$

Согласно приведенному выше степенному и тригонометрическому замечательным пределам, имеем: $\sqrt{1+2x}\sim 1+2x/2$, $\sqrt{1-3x}\sim 1-3x/2$, $\sin 3x\sim 3x$ при $x\to+0$. Подставляя, находим:

$$\lim_{x\to+0}\frac{\sqrt{1+2x}-\sqrt{1-3x}}{\sin 3x}=\lim_{x\to+0}\frac{1+x-(1-3x/2)}{3x}=\frac{5}{6}.$$

3.

$$\lim_{x\to+7}\frac{\sqrt{2+x}-3}{x-7}.$$

Сделаем сначала замену переменных $x=7+t$, так что $t\to 0$ когда $x\to 7$. Переписывая в новых переменных, получаем:

$$A=\lim_{x\to+7}\frac{\sqrt{2+x}-3}{x-7}=\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{9+t}-3}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{3\sqrt{1+t/9}-3}{t}.$$

Согласно степенному замечательному пределу, имеем: $\sqrt{1+t/9}\sim 1+t/18$ при $t\to+0$. В итоге получаем:

$$A=\lim_{t\to 0}\frac{3(1+t/18)-3}{t}=\frac{1}{6}.$$

4.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+3}{x-2}\right)^x.$$

Мы приведем два вычисления этого предела. Сначала немного трансформируем этот предел,

$$A=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+3}{x-2}\right)^x=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-2+5}{x-2}\right)^x=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{5}{x-2}\right)^x.$$

Сделаем такую замену переменных, чтобы внутри скобки стояло выражение $\left(1+\frac{1}{t}\right)$. Положим: $(x-2)/5=t$, так что $x=5t+2$. При этом $t\to+\infty$ при $x\to+\infty$. Получаем:

$$A=\lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{5t+2}=\lim_{t\to+\infty}\left(\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\right)^5\left(1+\frac{1}{t}\right)^2.$$

Используя первый замечательный предел, получаем: $A=e^5$. (Вторая скобка имеет пределом 1).

Вернемся к началу вычисления и перепишем предел следующим образом:

$$A=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{5}{x-2}\right)^x=\lim_{x\to+\infty}e^{x\ln\left(1+\frac{5}{x-2}\right)}.$$

При $x \to +\infty$ имеем: $5/(x-2) \to 0$. Используя логарифмический замечательный предел, получаем: $\ln\left(1+\frac{5}{x-2}\right) \sim \frac{5}{x-2}$ при $x \to +\infty$. Подставляя это в наш предел, получаем:

$$A = \lim_{x\to+\infty} e^{x\cdot\frac{5}{x-2}} = e^5.$$

Задачи. Вычислить пределы.

1.
$$\lim_{x\to 0}\frac{3x^3-2x+1}{10x^4-2x^3+2}.$$

2.
$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x^4+3x^2-1}.$$

3.
$$\lim_{x\to -1}\frac{x^2+4x-1}{x^3+1}.$$

4.
$$\lim_{x\to 0}\frac{(1-2x)^{1/4}-(1+3x)^{1/3}}{\sin 2x}.$$

5.
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+4}-2}{\sqrt{x^2+16}-4}.$$

6.
$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}+\sqrt{x}}{\sqrt{x^2-4}}.$$

7.
$$\lim_{x\to +0}\frac{1-\cos 2x}{5x^2}.$$

8.
$$\lim_{x\to 0}\frac{4x^2-3x}{2x^2-9x}.$$

9.
$$\lim_{x\to +\infty}\frac{x^5-2x^3+11x}{3x^5+2x^3-3}.$$

10.
$$\lim_{x\to +0}(\cos x)^{2/x^2}.$$

4.3 Непрерывные функции

4.3.1 Определения

Обсуждаются функции вещественной переменной, заданные на некотором интервале вещественной оси $(a,b)\subset\mathbb{R}$.

Определение. Функция $f(x)$ называется **непрерывной** в точке $x_0\in(a,b)$, если

1. Имеется конечный предел
$$A = \lim_{x\to x_0} f(x).$$

2. Этот предел совпадает со значением функции $f(x)$ в точке x_0, $A = f(x_0)$.

Определение. Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке $x_0\in(a,b)$ слева, если

1. Имеется конечный предел
$$A = \lim_{x\to x_0-0} f(x).$$

2. Этот предел совпадает со значением функции $f(x)$ в точке x_0, $A = f(x_0)$.

Определение. Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке $x_0 \in (a, b)$ справа, если

1. Имеется конечный предел

$$A = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x).$$

2. Этот предел совпадает со значением функции $f(x)$ в точке x_0, $A = f(x_0)$.

Теорема. Функция $f(x)$ непрерывна в точке $x_0 \in (a, b)$ тогда и только тогда, когда она одновременно непрерывна слева и справа в этой точке.

Доказательство.

Определение. Функция $f(x)$ называется непрерывной на интервале (a, b), если она непрерывна в любой точке этого интервала.

Определение. Функция $f(x)$ называется непрерывной на интервале $[a, b]$, если она непрерывна в любой точке интервала (a, b), в точке a непрерывна справа, а в точке b непрерывна слева.

4.3.2 Основные свойства

С помощью арифметики пределов нетрудно доказать соответствующие свойства непрерывных функций. Если функции $f(x)$, $g(x)$ непрерывны в точке x_0, то

1. Функция $f(x) + g(x)$ непрерывна в точке x_0,
2. Функция $f(x) \cdot g(x)$ непрерывна в точке x_0,
3. Если при этом $g(x_0) \neq 0$, то функция $\frac{f(x)}{g(x)}$ непрерывна в точке x_0.

Теорема. Любая элементарная функция непрерывна в тех точках, где она не обращается в бесконечность.

Теорема. Если $f(x)$ непрерывна в точке x_0, функция $g(y)$ непрерывна в точке $y_0 = f(x_0)$, то сложная функция $h(x) = g(f(x))$ непрерывна в точке x_0.

Доказательство.

Теорема. Пусть $f(x)$ непрерывна на интервале $[a, b]$. Тогда существуют конечные числа m и M со следующими свойствами.

1. Для всех $x \in [a, b]$ выполняются неравенства: $m \leq f(x) \leq M$.
2. Существуют точки $x_1, x_2 \in [a, b]$ такие, что $f(x_1) = m$, $f(x_2) = M$.
3. Для любого числа C, удовлетворяющего неравенству $m < C < M$ существует $x_C \in [a, b]$ такая, что $f(x_C) = C$.

Число m называется глобальным минимумом функции $f(x)$ на интервале $[a, b]$ (наименьшим значением), Число m называется глобальным максимумом функции $f(x)$ на интервале $[a, b]$ (наибольшим значением). Теорема, в частности, утверждает, что на интервале $[a, b]$ существует решение уравнения $f(x) = C$ для любого C, $m \leq C \leq M$.

4.3.3 Разрывы функции

Нарушение того или иного условия, фиксирующего непрерывность функции в точке x_0, приводит к появлению особенности в локальном поведении функции в данной точке.

Определение. Если существует конечный предел $A = \lim_{x \to x_0} f(x)$, причем $A \neq f(x_0)$, точка $x = x_0$ называется **устранимой особой точкой** функции $f(x)$.

Устранимую особую точку можно "исправить определив $f(x) = A$, так что точка x_0 становится точкой непрерывности "исправленной"$f(x)$.

Определение. Если существуют конечные левые и правые пределы $f(x)$ в точке x_0, но они не совпадают, точка x_0 называется точкой **разрыва первого рода** функции $f(x)$.

Пример. Типичным примером функции с разрывом первого рода является функция-ступенька $\theta(x)$, которая определяется следующим образом: $\theta(x) = 0, x < 0$, $\theta(x) = 1, x \geq 0$.

Она имеет разрыв первого рода в точке $x = 0$. Эта функция имеет важные приложения в естествознании, ее использование имитирует резкое "включение"того или иного процесса.

Определение. Если существуют левый и правый пределы функции $f(x)$ в точке $x = x_0$, причем хотя бы один из них бесконечен, точка $x = x_0$ называется точкой **разрыва второго рода** функции $f(x)$.

Пример. Рассмотрим функцию $y = 1/x$ на вещественной оси. В точке $x = 0$ она имеет левым пределом $-\infty$, правым пределом $+\infty$. Таким образом, в точке $x = 0$ функция $y = 1/x$ имеет разрыв второго рода.

Определение. Если функция $f(x)$ непрерывна во всех, за исключением конечного числа, точках интервала (a, b), ее называют **кусочно-непрерывной** на интервале (a, b).

Задачи. Найти и исследовать точки разрыва функций:

1.
$$y = e^{\frac{1}{x-2}}.$$

2.
$$y = \frac{1}{x^2 - 4}.$$

3.
$$y = \sin\left(\frac{\pi}{x+3}\right).$$

4.
$$y = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right).$$

5 Производная, дифференциальное исчисление

5.1 Производная

5.1.1 Определение производной

Понятие производной - одно из ключевых в математическом анализе. Пусть $f(x)$ задана на некотором интервале $(a, b) \subset \mathbb{R}$, точка $x_0 \in (a, b)$. Рассмотрим отношение

$$A(x_0, \vartriangle x) = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Это функция двух переменных - x_0 и еще одной переменной, которую обозначают Δx. Числитель этой дроби обозначают иногда как $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ и называют приращением функции $f(x)$ в точке x_0, соответствующим приращению аргумента Δx, так что

$$A(x_0, \Delta x) = \frac{\Delta f}{\Delta x}.$$

Определение. Если существует конечный предел

$$\lim_{\Delta \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = k,$$

то говорят, что функция $f(x)$ **дифференцируема** в точке $x = x_0$, имеет там **производную**, равную k, которую обозначают $\frac{df}{dx}(x_0)$ или $f'(x_0)$.

Итак, если $f(x)$ дифференцируема в точке $x = x_0$, то

$$\frac{df}{dx}(x_0) = f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Можно получить определение левой производной, если допускать лишь отрицательные значения Δx, и правой производной, допуская лишь положительные значения Δx.

Примеры.

1. Рассмотрим случай $f(x) = const = C$. В этом случае $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = C - C = 0$, так что $A(x_0, \Delta x) = 0$ и имеем: $C' = 0$.

2. Рассмотрим $f(x) = x^2$, составим

$$A(x_0, \Delta x) = \frac{(x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2}{/\Delta x} = \frac{2x_0\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 2x_0 + \Delta x.$$

При $\Delta x \to 0$ получим $A(x_0, \Delta x) \to 2x_0$. Таким образом, функция $f(x)$ имеет производную для любого значения x, причем $(x^2)' = 2x$.

Замечание. В точках разрыва функции $f(x)$ функция не имеет производной.

Контрольный вопрос. Докажите последнее утверждение.

Первые физические приложения.

1. Путь $S(t)$ - путь, пройденный движущейся по прямой точкой. Тогда мгновенной скоростью точки будет

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{S(t + \Delta t) - S(t)}{\Delta t} = \frac{dS}{dt}(t).$$

2. Пусть через данное сечение провода к моменту t протек заряд $Q(t)$, тогда электрический ток

$$I(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{Q(t + \Delta t) - Q(t)}{\Delta t} = \frac{dQ}{dt}(t).$$

Обсудим геометрический смысл производной. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, проходящий через (близкие друг другу) точки A и B. Проведем через них хорду AB. Отношение $(f(x+\Delta x)-f(x))/\Delta x$ соответствует тангенсу угла наклона хорды AB. Когда $\Delta x \to 0$, точка B стремится к точке A, при этом хорда превращается в касательную к графику функции, проходящую через точку $(x, f(x))$. Соответственно, предел отношения превращается в тангенс угла наклона касательной. Итак, $f'(x) = \operatorname{tg} \alpha$ - значение производной равно тангенсу угла наклона касательной к графику функции, проходящей через точку $(x, f(x))$.

5.1.2 Производные от элементарных функций

Вычисление производных от элементарных функций сводится к вычислению пределов, причем мы используем замечательные пределы.

1. $f(x) = x^\alpha$, $f'(x) = \alpha \cdot x^{\alpha - 1}$. Частный случай $\alpha = 0$: $f(x) = 1$, $f'(x) = 0$. Частный случай $\alpha = 1$: $f(x) = x$, $f'(x) = 1$.

Вычисление. Выписываем:

$$A(x_0, \Delta x) = \frac{(x_0 + \Delta x)^\alpha - x_0^\alpha}{\Delta x} = x_0^\alpha \frac{(1 + \frac{\Delta x}{x_0})^\alpha - 1}{\Delta x} = x_0^{\alpha - 1} \frac{(1 + \frac{\Delta x}{x_0})^\alpha - 1}{\frac{\Delta x}{x_0}}.$$

Используя степенной замечательный предел при $\Delta x / x_0 \to 0$, получаем:

$$\lim_{\Delta x \to 0} A(x_0, \Delta x) = \alpha x_0^{\alpha - 1}.$$

2. $f(x) = e^x$, $f'(x) = e^x$.

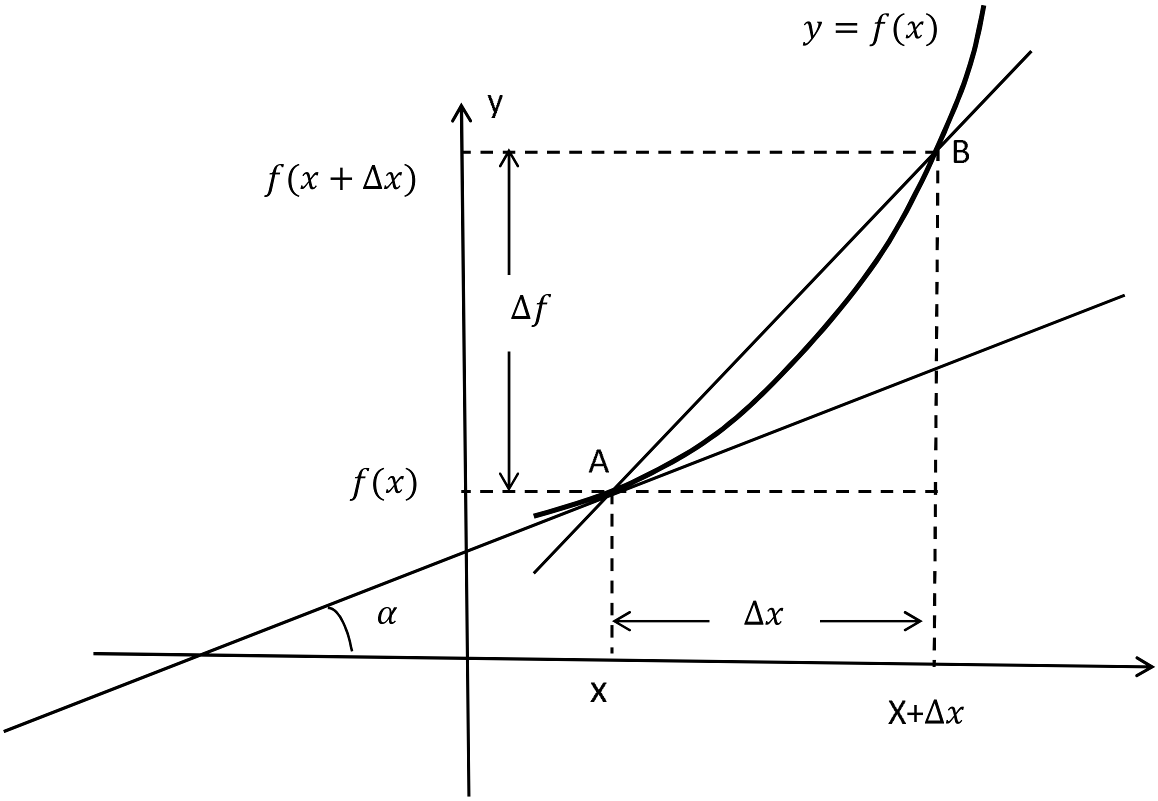

Рис. 2: Геометрический смысл производной.

Вычисление. В данном случае

$$A(x_0, \Delta x) = \frac{e^{x_0+\Delta x} - e^{x_0}}{\Delta x} = e^{x_0}\frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}.$$

С помощью показательного замечательного предела получаем при $\Delta x \to 0$:

$$\lim_{\Delta x \to 0} A(x_0, \Delta x) = e^{x_0}.$$

3. $f(x) = \sin x,\ f'(x) = \cos x.$

Вычисление.

$$A(x_0, \Delta x) = \frac{\sin(x_0 + \Delta x) - \sin(x_0)}{\Delta x}.$$

Используя известное тригонометрическое тождество (разность синусов равна...), имеем:

$$A(x_0, \Delta x) = 2\frac{\sin(\Delta x/2)\cos(x_0 + \Delta x/2)}{\Delta x} = \frac{\sin(\Delta x/2)\cos(x_0 + \Delta x/2)}{\Delta x/2}.$$

С помощью тригонометрического предельного соотношения при $\Delta x \to 0$ получаем:

$$\lim_{\Delta x \to 0} A(x_0, \Delta x) = \cos(x_0).$$

4. $f(x) = \cos x,\ f'(x) = -\sin x.$

Вычисление.

$$A(x_0, \Delta x) = \frac{\cos(x_0 + \Delta x) - \cos(x_0)}{\Delta x}.$$

Используя известное тригонометрическое тождество (разность косинусов равна...), имеем:

$$A(x_0, \Delta x) = -2\frac{\sin(\Delta x/2)\sin(x_0 + \Delta x/2)}{\Delta x} = -\frac{\sin(\Delta x/2)\sin(x_0 + \Delta x/2)}{\Delta x/2}.$$

С помощью тригонометрического предельного соотношения при $\Delta x \to 0$ получаем:

$$\lim_{\Delta x \to 0} A(x_0, \Delta x) = -\sin(x_0).$$

5. $f(x) = \ln x$, $f'(x) = 1/x$.
Вычисление.

$$A(x_0, \Delta x) = \frac{\ln(x_0 + \Delta x) - \ln(x_0)}{\Delta x} = \frac{\ln((x_0 + \Delta x)/x_0)}{\Delta x} = \frac{1}{x_0}\frac{\ln(1 + \Delta x/x_0)}{\Delta x/x_0}.$$

С помощью логарифмического предельного соотношения при $\Delta x \to 0$ получаем:

$$\lim_{\Delta x \to 0} A(x_0, \Delta x) = \frac{1}{x_0}.$$

5.1.3 Производные от суммы, произведения и частного функций

Производная возникает в результате предельного перехода. Поэтому свойства пределов приводят к соответствующим свойствам производных.

Теорема. Пусть функции $f(x)$, $g(x)$ дифференцируемы в точке x. Тогда

1. Функция $f(x) + g(x)$ также дифференцируема, причем

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x),$$

,

2. Функция $f(x) \cdot g(x)$ дифференцируема, причем (**формула Лейбница**)

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x),$$

3. Если $g(x) \neq 0$, тогда $f(x)/g(x)$ дифференцируема в точке x, причем

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$$

Доказательство.

1.

$$A(x_0, \Delta x) = \frac{((f(x_0 + \Delta x) + g(x_0 + \Delta x)) - (f(x_0) + g(x_0))}{\Delta x} =$$
$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} + \frac{g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)}{\Delta x}.$$

Согласно условиям теоремы, обе дроби в последнем выражении имеют пределы при $\Delta x \to 0$, так что используя тот факт, что предел суммы равен сумме пределов (конечных!) получаем:

$$\lim_{\Delta x \to 0} A(x_0, \Delta x) = f'(x_0) + g'(x_0).$$

2.

$$A(x_0, \Delta x) = \frac{f(x_0 + \Delta x) \cdot g(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \cdot g(x_0)}{\Delta x} =$$

$$\frac{f(x_0+\Delta x)\cdot g(x_0+\Delta x)-f(x_0+\Delta x)\cdot g(x_0)+f(x_0+\Delta x)\cdot g(x_0)-f(x_0)\cdot g(x_0)}{\Delta x}=$$

$$f(x_0+\Delta x)\frac{g(x_0+\Delta x)-g(x_0)}{\Delta x}+g(x_0)\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

Согласно условиям теоремы, при $\Delta x \to 0$ выражения

$$\frac{g(x_0+\Delta x)-g(x_0)}{\Delta x}, \quad \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

имеют пределы, равные производным функций $g'(x_0), f'(x_0)$. Так как функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то она непрерывна в этой точке, значит $f(x_0+\Delta x) \to f(x_0)$ при $\Delta x \to 0$. В итоге получаем:

$$\lim_{\Delta x\to 0} A(x_0,\Delta x)=f'(x_0)\cdot g(x_0)+f(x_0)\cdot g'(x_0).$$

3.

$$A(x_0,\Delta x)=\frac{\frac{f(x_0+\Delta x)}{g(x_0+\Delta x)}-\frac{f(x_0)}{g(x_0)}}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)g(x_0)-f(x_0)g(x_0+\Delta x)}{g(x_0+\Delta x)g(x_0)\Delta x}=$$

$$\frac{1}{g(x_0+\Delta x)g(x_0)}\frac{f(x_0+\Delta x)g(x_0)-f(x_0)g(x_0)+f(x_0)g(x_0)-f(x_0)g(x_0+\Delta x)}{\Delta x}=$$

$$\frac{1}{g(x_0+\Delta x)g(x_0)}\left(\frac{f(x_0+\Delta x)g(x_0)-f(x_0)g(x_0)}{\Delta x}-\frac{f(x_0)g(x_0+\Delta x)-f(x_0)g(x_0)}{\Delta x}\right).$$

Согласно условиям теоремы, при $\Delta x \to 0$ выражения

$$\frac{g(x_0+\Delta x)-g(x_0)}{\Delta x}, \quad \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

имеют пределы, равные производным функций $g'(x_0), f'(x_0)$. Так как функция $g(x)$ дифференцируема в точке x_0, то она непрерывна в этой точке, значит $g(x_0+\Delta x) \to g(x_0)$ при $\Delta x \to 0$. В итоге получаем:

$$\lim_{\Delta x\to 0} A(x_0,\Delta x)=\frac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

Важный частный случай. Если $f(x)=const=C$, то $C'=0$ и согласно формуле Лейбница имеем:

$$(Cg(x))'=Cg'(x).$$

Примеры.

1. Используя эти формулы, получаем:

$$(x^2+3e^x\cdot x^5-\sin x)'=(x^2)'+3$$

2. Вычислим $(\operatorname{tg} x)'$, используя тот факт, что $\operatorname{tg} x=\sin x/\cos x$. Применяя формулу дифференцирования частного, получаем:

$$(\operatorname{tg} x)'=\frac{(\sin x)'\cdot\cos x-\sin x\cdot(\cos x)'}{\cos^2 x}=\frac{\cos^2 x-\sin x\cdot(-\sin x)}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}.$$

3. Вычислим $(\operatorname{ctg} x)'$, используя тот факт, что $\operatorname{ctg} x=\cos x/\sin x$. Применяя формулу дифференцирования частного, получаем:

$$(\operatorname{ctg} x)'=\frac{(\cos)'\cdot\sin x-\cos x\cdot(\sin x)'}{\sin^2 x}=\frac{-\sin^2 x-\cos^2 x}{\sin^2 x}=-\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Задачи.

Вычислить значение производной в указанной точке.

1. Вычислить $f'(4)$,
$$f(x) = 3x^2 - 2\sqrt{x}.$$

2. Вычислить $f'(1)$,
$$f(x) = \frac{x^3 - 5x + 1}{x^2}.$$

3. Вычислить $f'(2)$,
$$f(x) = \frac{3}{5-x} + x^2/3.$$

Вычислить производную от указанных функций.

1. $y(x) = 3x^3 + 4x + 7$.
2. $y(x) = x^4 - x^3/3 + 2x - 1$.
3. $y(x) = (x^3 - 2x - 1)(x^3 + x^2 + 1)$.
4. $y(x) = \sqrt{x}(x^3 + 2\sqrt{x} - 1)$.
5. $y(x) = (x+1)^2(x-1)$.
6. $y(x) = x \cdot e^x$.
7. $y(x) = x^2 \cdot \sin x$.
8. $y(x) = e^x \cdot (\sin x + \cos x)$.
9.
$$y(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$
10.
$$y(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x^3 + 1}.$$
11.
$$y(x) = \frac{1 - x^3}{1 - x^5}.$$
12.
$$y(x) = \operatorname{tg} x + \frac{e^x}{1+x}.$$
13.
$$y(x) = \frac{\sqrt{x} + 3x^3 - 1}{7 + 2x}.$$
14.
$$y(x) = \frac{\sin x}{1 + \cos x}.$$
15.
$$y(x) = \frac{\arcsin x}{\arccos x}$$

.

5.1.4 Производные от сложной функции, от обратной функции, от функции, заданной параметрически

Пусть $y = f(x)$, $z = h(y)$. Подставляя y в аргумент функции $h(y)$, получим композицию функций $z = h(g(x))$ - сложную функцию. Иногда ее обозначают $z = (h \circ g)(x)$. Сложная функция может быть образована композицией и большего числа функций - трех, четырех и т.д.

Пример. Пусть $y = 2x^2$, $z = \sin x$. Тогда имеем: $z = \sin(2x^2)$.

Предположим, что известны производные dg/dx, dh/dy. Возникает вопрос: как вычислить производную сложной функции dz/dx, где $z = h(g(x))$?

Теорема. Пусть $f(x)$ дифференцируема в точке $x = x_0$, $h(y)$ дифференцируема в точке $y_0 = f(x_0)$. Тогда $z = h(g(x))$ дифференцируема в точке $x = x_0$, причем

$$\left.\frac{dz}{dx}\right|_{x=x_0} = \left.\frac{dh}{dy}\right|_{y=f(x_0)} \cdot \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_0}. \tag{8}$$

Доказательство. Обозначим $y_0 = f(x_0)$. В соответствии с нашими предположениями составим выражение

$$A(x_0, \Delta x) = \frac{h(f(x_0 + \Delta x)) - h(f(x_0))}{\Delta x} =$$

$$\frac{h(f(x_0 + \Delta x)) - h(f(x_0))}{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)} \cdot \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

При $\Delta x \to 0$ в силу непрерывности $f(x)$ в точке x_0 имеем: $y_0 + \Delta y = f(x_0 + \Delta x) \to f(x_0) = y_0$. В силу условий теоремы первый множитель имеет пределом при $\Delta x \to 0$ величину $h'(y)|_{y=f(x_0)}$, второй множитель имеет пределом величину $f'(x_0)$. В итоге получаем:

$$\lim_{\Delta x \to 0} A(x_0, \Delta x) = h'(y)|_{y=f(x_0)} \cdot f'(x_0).$$

Замечание. Соотношение (8) содержит в левой части 2 сомножителя - в соответствии с тем, что сложная функция образована композицией двух функций. Если сложная функция образована композицией 3 функций, в левой части имеется 3 сомножителя и т.д.

Напомним, что если задана функция $y = f(x)$, то обратной к ней функцией называется функция $x = h(y)$ со следующими свойствами: $h(f(x)) = x$, $f(h(y)) = y$. Разумеется, обратная функция существует не всегда.

Теорема. Пусть функция $y = f(x)$ имеет непрерывную производную в некоторой окрестности V точки $x = x_0$, причем $f'(x_0) \neq 0$. Тогда в некоторой окрестности $U \subset V$, $x_0 \in U$, функция $f(x)$ имеет обратную, определенную в некоторой окрестности точки $y_0 = f(x_0)$, причем выполняется равенство:

$$h'(y_0) = \left.\frac{1}{f(x)}\right|_{x=h(y_0)}. \tag{9}$$

Доказательство. Доказательство существования обратной функции $h(e)$ в некоторой окрестности точки y_0 выходит за рамки данного курса. Здесь мы выведем формулу (9). Полагая, что обратная функция существует, применим к равенству $f(h(y)) = y$ формулу дифференцирования сложной функции (8). Дифференцируя это равенство по переменной y, подставляя $y = y_0$, получаем:

$$1 = \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=h(y_0)} \cdot \left.\frac{dh}{dy}\right|_{y_0}.$$

Отсюда следует формула (9).

Примеры.

1. Пусть $y = \sin x$, тогда обратная функция $x = \arcsin y$, причем мы считаем, что $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$. Согласно (9), имеем:

$$(\arcsin y)' = \left.\frac{1}{(\sin x)'_x}\right|_{x=\arcsin y} = \left.\frac{1}{\cos x}\right|_{x=\arcsin y}.$$

Если $y = \sin x$, то $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x} = \sqrt{1 - y^2}$. Таким образом, получаем:

$$(\arcsin y)' = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}.$$

Вспомним тригонометрическое тождество $\arcsin y + \arccos y = \pi/2$ (сумма острых углов в прямоугольном треугольнике равна $\pi/2$). Если это тождество продифференцировать по y, получим производную от $\arccos y$:

$$(\arccos y)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}.$$

2. Пусть $y = \operatorname{tg} x$, тогда обратная функция $x = \operatorname{arctg} y$. Согласно (9), имеем:

$$(\operatorname{arctg} y)' = \left.\frac{1}{(\operatorname{tg} x)'_x}\right|_{x=\operatorname{arctg} y} = \left.\frac{1}{(\cos x)^{-2}}\right|_{x=\operatorname{arctg} y} = \cos^2 x\big|_{x=\operatorname{arctg} y}.$$

Если $y = \operatorname{tg} x$, то $\cos^2 x = (1 + \operatorname{tg}^2 x)^{-1} = (1 + y^2)^{-1}$. Таким образом, получаем:

$$(\operatorname{arctg} y)' = \frac{1}{1 + y^2}.$$

Вспомним тригонометрическое тождество $\operatorname{arctg} y + \operatorname{arcctg} y = \pi/2$ (сумма острых углов в прямоугольном треугольнике равна $\pi/2$). Если это тождество продифференцировать по y, получим производную от $\operatorname{arcctg} y$:

$$(\operatorname{arcctg} y)' = -\frac{1}{1 + y^2}.$$

Далее, пусть для некоторых функций $a(t), b(t)$, заданных на интервале $[t_1, t_2]$, $x = a(t)$, $y = b(t)$. Предположим, что для функции $x = a(t)$ существует обратная функция $t = \phi(x)$. Тогда $y = b(t) = b(\phi(x))$, так что появляется зависимость между x и y. В этом случае говорят, что функция $y(x)$ задана параметрически (с помощью параметра t). Если известны производные функций $a(t)$, $b(t)$, то можно вычислить производную функции $y'(x)$.

Теорема. Предположим, что функции $a(t), b(t)$ дифференцируемы на интервале $[t_1, t_2]$, причем существует обратная функция $t = \phi(x)$, дифференцируемая при всех интересующих нас x. Тогда производная $y'(x)$ существует, причем

$$y'(x) = \left.\frac{b'(t)}{a'(t)}\right|_{t=\phi(x)}. \tag{10}$$

Доказательство. Согласно условиям теоремы, функцию $y(x)$ можно представить как сложную функцию, $y(x) = b(\phi(x))$. Применяя формулу дифференцирования сложной функции, получаем:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{db}{dt} \cdot \frac{d\phi}{dx}.$$

$\phi(x)$ - обратная функция к $a(t)$, так что для вычисления ее производной можно применить формулу (9),

$$\frac{d\phi}{dx} = \frac{1}{\frac{da}{dt}}.$$

В итоге получаем:

$$\frac{dy}{dx} = \left.\frac{b'(t)}{a'(t)}\right|_{t=\phi(x)}.$$

В принципе можно в этой формуле не возвращаться к переменной x, оставаясь работать с переменной t.

Задачи. Вычислить производную от указанных функций.

1. $y(x) = \sin(\sqrt{x})$.
2. $y(x) = \sqrt{\cos x}$.
3. $y(x) = \sqrt{1 + 2x - x^2}$.
4. $y(x) = \sin(2x) + 2\cos(3x)$.
5.
$$y(x) = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$$
.
6. $y(x) = \sqrt{1 + \ln x}$.
7. $y(x) = (\arcsin x)^3$.
8. $y(x) = \ln(\sin x + 1)$.
9. $y(x) = a^x$.
10. $y(x) = \operatorname{arctg} x^2$.
11. $y(x) = \ln(x^2 - 4x)$.
12.
$$y(x) = \arcsin\left(\frac{2}{x}\right).$$
13.
$$y(x) = \frac{x^4}{4^x}.$$
14. $y(x) = e^{\arcsin 2x}$.
15. $y(x) = \sin(x/2)\sin 2x$.
16. $y(x) = \sin(e^{\cos x})$.

5.1.5 Таблица производных

Приведем итоговую таблицу производных, включающую производные важнейших функций.

1. $(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$.
2. $(e^x)' = e^x$.
3. $(\sin x)' = \cos x$.
4. $(\cos x)' = -\sin x$.
5. $(\ln x)' = 1/x$.
6. $(a^x)' = \ln a \cdot a^x$.
7.
$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}.$$
8.
$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$
9.
$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

10.
$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

11.
$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}.$$

12.
$$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

5.2 Первый дифференциал

5.2.1 Определение и основные свойства первого дифференциала

Пусть в некоторой окрестности точки x_0 задана функция $y = f(x)$, причем $f(x)$ дифференцируема в точке x_0.

Определение. **Первым дифференциалом** функции $f(x)$ в точке $x = x_0$ называется выражение $df(x_0, \Delta x) = f'(x_0) \cdot \Delta x$, где величина Δx предполагается достаточно малой.

Замечание. Если $f(x) = x$, то имеем: $dx = \Delta x$. Это равенство выполняется, когда x является независимой переменной.

Из определения производной следует, что

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \xrightarrow[\Delta x \to 0]{} f'(x_0),$$

так что

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} - f'(x_0) = \alpha(\Delta x), \quad \alpha(\Delta x) \xrightarrow[\Delta x \to 0]{} 0.$$

Умножая на Δx, получаем:

$$\Delta f = df(x_0, \Delta x) + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x, \quad \alpha(\Delta x) \xrightarrow[\Delta x \to 0]{} 0.$$

Следовательно, при малых Δx имеем приближенное равенство:

$$\Delta f \approx df.$$

Это приближенное равенство (и его аналоги) играют ключевую роль в приближенных вычислениях.

Описанные выше свойства производной приводят к соответствующим свойствам первого дифференциала. Если заданы две дифференцируемые функции $u(x)$, $v(x)$, $c = const$, то

1. $d(c \cdot u) = c \cdot du$.
2. $d(u + c) = du$.
3. $d(u + v) = du + dv$.
4. $d(u \cdot v) = du \cdot v + u \cdot dv$.
5. $d(u/v) = (du \cdot v - u \cdot dv)/v^2$.

5.2.2 Геометрический смысл первого дифференциала

Рассмотрим график функции $y = f(x)$ в окрестности точки x и касательную к графику, проведенную через точку $(x, f(x)$. Из картинки ясно, что отрезок df - это то, что отсекают касательная и прямая $y = f(x)$ на вертикальной прямой, проходящей через $x + \Delta x$.

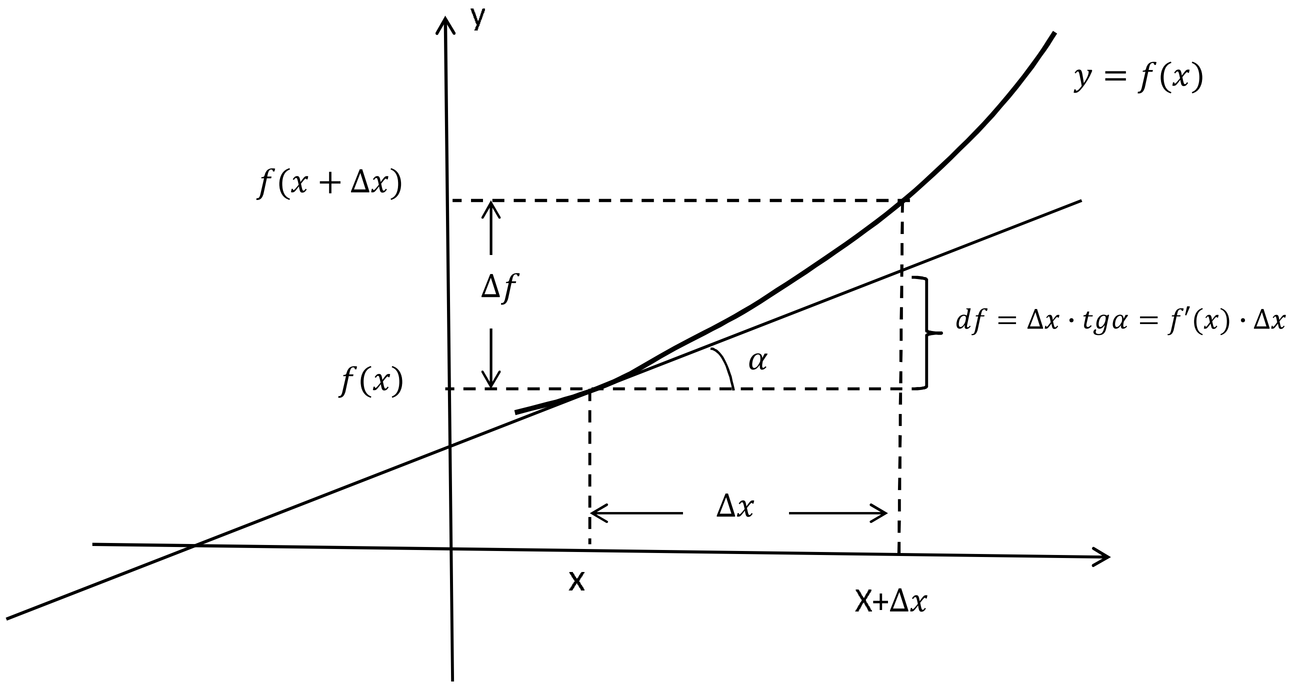

Рис. 3: К геометрическому смыслу первого дифференциала

5.2.3 Дифференциал сложной функции. Инвариантность первого дифференциала

Пусть $y = f(x)$, $z = h(y)$, причем эти функции дифференцируемы при всех интересующих нас x, y. Подставляя $y = f(x)$ в аргумент функции $z = h(y)$, получим сложную функцию $z = h(f(x))$. Выпишем ее первый дифференциал,

$$dz = (h(f(x)))' \, \Delta x.$$

Используя правило дифференцирования сложной функции, получаем:

$$dz = \frac{dh}{dy} \cdot \frac{df}{dx} \Delta x.$$

Однако согласно определению первого дифференциала, $\frac{df}{dx}\Delta x = dy$, так что предыдущее равенство переписывается в виде:

$$dz = \frac{dh}{dy} dy.$$

Это равенство выглядит точно также, как если бы мы полагали нашу функцию зависящей от независимой переменной y, забыв о том, что мы имеем дело со сложной функцией. Этот факт и называется ***инвариантностью первого дифференциала***.

Задачи.

1. Найти дифференциалы функций

а) $y = 3x^3 + 6x - 4$.

б) $y = \sin x - x \cos 2x$.

в) $y = \cos(\ln x))$.

2. Вычислить приближенно значения функций, используя первый дифференциал.

а) $f(x) = x^5 - 2x^3 - 5x^2 + 7$ при $x = 1.001$.

б) $f(x) = x \ln(x - 2)$ при $x = 3.003$.

в) $f(x) = \sqrt{4x^3 - 2x^2 - 1}$ при $x = 1.002$.

5.3 Свойства дифференцируемых функций

Теорема. Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то эта функция непрерывна в точке x_0.

Доказательство. Согласно условию теоремы, существует предел

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0).$$

Значит,

$$f(x_0+\Delta x)=f(x_0)+(f'(x_0)+\alpha(\Delta x))\cdot\Delta x,$$

причем $\alpha(\Delta x)\to 0$ при $\Delta x\to 0$. Значит, правая часть этого равенства стремится к $f(x_0)$ при $\Delta x\to 0$, это и означает непрерывность $f(x)$ в точке x_0.

Замечание. Обратное утверждение не верно: непрерывная функция не обязана быть дифференцируемой. Т.о., дифференцируемость "более сильное"свойство, чем непрерывность.

Определение. Пусть функция $y=f(x)$ задана на интервале (a,b), $x_0\in(a,b)$. Говорят, что функция $y=f(x)$ имеет в точке x_0 **локальный максимум**, если для некоторой окрестности этой точки U справедливо: $f(x)\le f(x_0)$ при всех $x\in U$. Аналогичным образом определяется **локальный минимум**.

Теорема Ферма. Пусть функция $y=f(x)$ задана на интервале (a,b), $x_0\in(a,b)$, причем $f(x)$ дифференцируема в точке x_0. Если $f(x)$ имеет в точке x_0 локальный максимум (или локальный минимум), то $f'(x_0)=0$.

Доказательство. Будем для определенности считать, что в точке x_0 имеется локальный максимум (доказательство для локального минимума по существу то же самое). Рассмотрим выражение

$$A(x_0,\Delta x)=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

рассмотрим знак этого выражения. При достаточно малых положительных Δx мы, согласно определению локального максимума, имеем: $f(x_0+\Delta x)\le f(x_0)$, так что числитель этой дроби неположителен, в то время как знаменатель - положителен. Поэтому имеем для таких Δx: $A(x_0,\Delta x)\le 0$. Переходя к пределу (который существует, поскольку существует производная $f'(x_0)$) получаем: $f'(x_0)\le 0$. Рассматривая отрицательные значения Δx, аналогичным образом получаем: $f'(x_0)\ge 0$. В итоге заключаем: $f'(x_0)=0$.

Теорема Ферма является необходимым условием наличия в точке x_0 локального максимума или локального минимума функции $f(x)$ - этим условием является равенство $f'(x_0)=0$. Для вывода достаточного условия нам потребуется несколько более продвинутая техника, оно обсуждается ниже. В связи с этими условиями возникает следующее определение.

Определение. **Стационарной точкой** (или: экстремальной точкой) функции $f(x)$ называется такая точка x_0, которая удовлетворяет условию $f'(x_0)=0$.

Теорема Ролля. Пусть функция $f(x)$ удовлетворяет следующим условиям.

1. Она непрерывна на интервале $[a,b]$.
2. Она дифференцируема на интервале (a,b).
3. $f(a)=f(b)$.

Тогда на интервале $[a,b]$ найдется точка c такая, что $f'(c)=0$.

Доказательство. Согласно свойствам непрерывных функциях они на замкнутом конечном интервале $[a,b]$ принимают максимальное и минимальное значения M,m, которые, естественно, является и локальными максимумом и минимумом. Возможны следующие варианты.

а) $M = m$, откуда следует, что $f(x) = const = m$. При этом $f'(x) = 0$ для всех $x \in (a, b)$.

б) $M \neq m$. Возможна ли ситуация, когда оба эти значения принимаются на концах интервала? Поскольку $f(a) = f(b)$, этого быть не может. Значит, одно из этих значений принимается в точке c, лежащей внутри интервала (a, b). Соответственно, по теореме Ферма, имеем: $f'(c) = 0$.

Рассмотрим геометрическую интерпретацию теоремы Ролля. На рисунке 4 изображе-

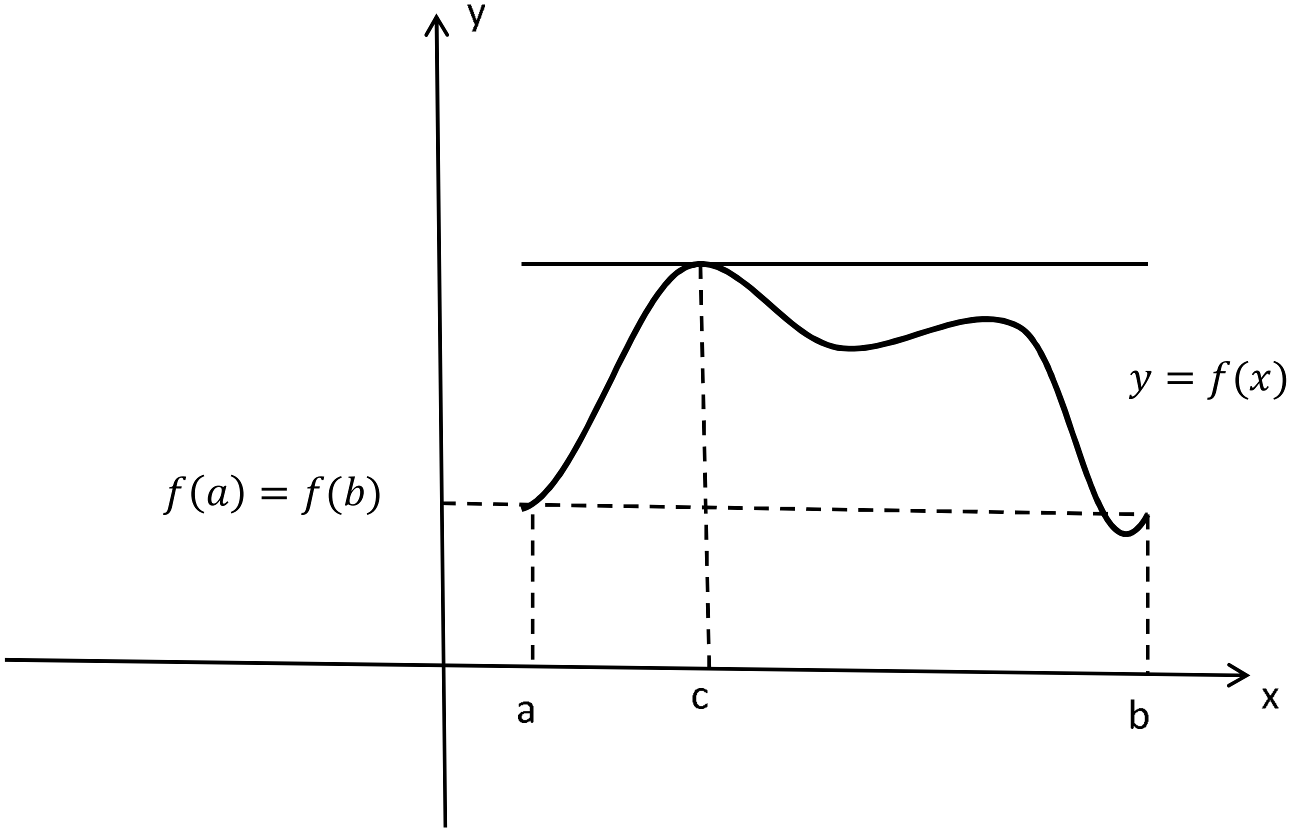

Рис. 4: К геометрическому смыслу теоремы Ролля

на функция, принимающая равные значения на концах. В соответствии с заключением теоремы, существует точка c, в которой касательная к графику функции параллельна оси x (т.е. $f'(c) = 0$).

Теорема Лагранжа. Пусть функция $f(x)$ удовлетворяет следующим условиям.

1. Она непрерывна на интервале $[a, b]$.

2. Она дифференцируема на интервале (a, b).

Тогда на интервале $[a, b]$ найдется точка c такая, что

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \tag{11}$$

Доказательство. Введем константу

$$Q = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

и новую функцию

$$F(x) = f(x) - f(a) - Q \cdot (x - a).$$

Из этих определений следует, что $F(a) = F(b) = 0$, функция $F(x)$ непрерывна на интервале $[a, b]$ и дифференцируема на интервале (a, b). Таким образом, она удовлетворяет условиям теоремы Ролля и, согласно этой теореме, существует $c \in (a, b)$ такая, что $F'(c) = 0$. Из наших определений следует: $F'(c) = f'(c) - Q = 0$. Следовательно,

$$f'(c) = Q = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Формула (11) называется **формулой конечных приращений**. Ее можно переписать в виде:

$$f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a),$$

где, напомним, $c \in (a, b)$. В таком виде она часто используется в том случае, когда требуется вычислить (или оценить) величину $f(b) - f(a)$.

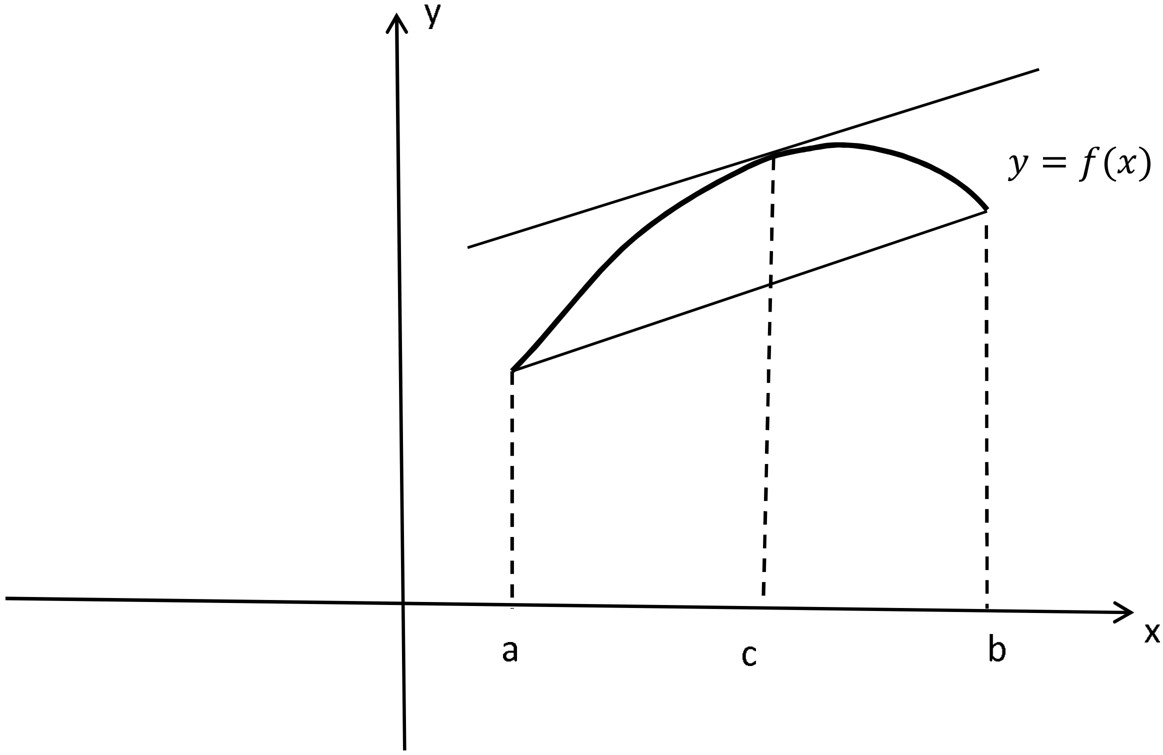

Рис. 5: К геометрическому смыслу теоремы Лагранжа

Рассмотрим геометрическую интерпретацию теоремы Лагранжа, см. рис. 5. Значение $f'(c)$ фиксирует угол наклона касательной к графику в точке c, выражение $(f(b) - f(a))/(b - a)$ задает угол наклона хорды, соединяющей концы кривой. Таким образом, теорема Лагранжа утверждает, что между a и b найдется такая точка c, что касательная к графику в этой точке параллельна хорде, соединяющей концы кривой.

Теорема Коши. Пусть функции $f(x), g(x)$ удовлетворяют следующим условиям.

1. Они непрерывны на интервале $[a, b]$.

2. Они дифференцируемы на интервале (a, b), причем $g(a) \neq g(b)$.

Тогда на интервале $[a, b]$ найдется точка c такая, что

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Доказательство. Определим константу

$$Q = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

и функцию

$$F(x) = f(x) - Q \cdot g(x).$$

Эта функция непрерывна на интервале $[a, b]$, дифференцируема на интервале (a, b), причем

$$F(a) = f(a) - g(a) \cdot \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f(a)g(b) - f(b)g(a)}{g(b) - g(a)} =$$

$$f(b) - g(a) \cdot \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = F(b).$$

Таким образом, функция $F(x)$ удовлетворяет условиям теоремы Ролля, следовательно, существует $c \in (a, b)$ такая, что $F'(c) = 0$. Это равенство можно переписать в виде:

$$f'(c) - Q \cdot g'(c) = 0,$$

что эквивалентно заключению теоремы.

Теорема Лагранжа является частным случаем теоремы Коши в том случае, когда $g(x) = x$.

5.4 Правило Лопиталя и раскрытие неопределенностей

Рассмотрим отношение двух функций $f(x)/g(x)$. Иногда возникает ситуация, когда $f(x) \to 0$, $g(x) \to 0$ при $x \to c$, где c - конечное число. В этом случае говорят о **неопределенности** типа $0/0$ при $x \to c$. Вычисление значения $\lim_{x \to c} f(x)/g(x)$ называется раскрытием неопределенности. Такого типа задачи можно решать с помощью следующей теоремы.

Теорема (Правило Лопиталя). Пусть $f(x), g(x)$ дифференцируемы на интервале (a, b), и в некоторой точке $c \in (a, b)$ выполняются равенства: $f(c) = g(c) = 0$. Предположим, что существует предел $\lim_{x \to c} (f'(x)/g'(x))$. Тогда существует и предел $\lim_{x \to c} (f(x)/g(x))$, причем

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Доказательство. Возьмем какую-нибудь точку $x \in (a, b)$, $x > c$, и применим к интервалу (c, x) теорему Коши (все условия ее выполняются). Согласно этой теореме существует точка $\xi \in (c, x)$ такая, что

$$\frac{f(x) - f(c)}{g(x) - g(c)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Так как $f(c) = g(c) = 0$, имеем:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

При $x \to c$ имеем: $\xi \to c$. Устремим в последнем равенстве значение x к c. Согласно условию теоремы, выражение в правой части имеет предел, так что и выражение в левой части имеет тот же предел.

Пример. Рассмотрим неопределенность $\sin(2x)/\sin(5x)$ при $x \to 0$. Применим правило Лопиталя. Вычисляем производные от числителя и знаменателя: $(\sin(2x))' = 2\cos(2x)$, $(\sin(5x))' = 5\cos(5x)$. При этом отношение производных имеет при $x \to 0$ конечный предел,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)'}{\sin(5x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{2\cos(2x)}{5\cos(5x)} = \frac{2}{5}.$$

В соответствии с правилом Лопиталя имеем:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{\sin(5x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)'}{\sin(5x)'} = \frac{2}{5}.$$

Имеются варианты правила Лопиталя и в том случае, когда предельная точка c находится на бесконечности, и для раскрытия неопределенностей типа ∞/∞.

Иногда для раскрытия неопределенности требуется применить правило Лопиталя несколько раз.

Пример. Вычислим предел

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\cos x - 1}.$$

Числитель и знаменатель этого выражения принимают в точке $x = 0$ значение 0, так что это неопределенность типа 0/0. Вычислим производные числителя и знаменателя в точке 0: это соответственно $2x$ и $-\sin x$. В точке $x = 0$ обе эти функции обращаются в ноль, так что опять имеем неопределенность типа 0/0. Вычисляем следующие производные числителя и знаменателя: 2 и $-\cos x$ соответственно. В точке $x = 0$ они принимают значения 2 и -1, так что имеем:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\cos x - 1} = \lim_{x\to 0} \frac{2x}{-\sin x} = -2.$$

Задачи. Вычислить пределы.

1.
$$\lim_{x\to a} \frac{e^x - e^a}{x - a}.$$

2.
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\ln(1 + x)}.$$

3.
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}.$$

4.
$$\lim_{x\to 2} \frac{\ln(x^2 - 3)}{x^2 + 3x - 10}.$$

5.
$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x^2} - \operatorname{ctg}^2 x\right).$$

6 Высшие производные и дифференциалы

6.1 Определение и свойства высших производных

Пусть на некотором интервале (a, b) задана дифференцируемая функция $f(x)$. Таким образом, возникает отображение $x \to f'(x)$, заданное на интервале (a, b). Это отображение можно рассматривать как новую функцию $g(x)$, заданную на интервале (a, b), и исследовать ее свойства. Соответственно, можно задавать вопрос о ее дифференцируемости.

Определение. Предположим, что функция $g(x) = f'(x)$ дифференцируема в точке $x = x_0$. Тогда говорят, что $f(x)$ дважды дифференцируема в точке $x = x_0$, значение $g'(x_0)$ называют второй производной функции $f(x)$ в точке $x = x_0$ и обозначают $f''(x_0)$ или

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}\right)(x_0) \quad \text{или} \quad \frac{d^2 f}{dx^2}(x_0).$$

Аналогичным образом определяются и производные более высоких порядков - третьего, четвертого и т.д. Их обозначают, соответственно, $f'''(x)$, $f^{iv}(x)$, $f^{v}(x)$,..., $f^{(n)}(x)$, или

$$\frac{d^3 f}{dx^2}(x), \quad \frac{d^4 f}{dx^4}(x), \quad \frac{d^5 f}{dx^5}(x), \quad \frac{d^n f}{dx^n}(x).$$

Пример. Пусть $f(x) = 4x^3 - 2x^2 + 1$. Вычислим последовательные производные этой функции. Получаем: $f'(x) = 12x^2 - 4x$, $f''(x) = 24x - 4$, $f'''(x) = 24$, $f^{(n)}(x) = 0$ при $n > 3$.

Замечание. Производной нулевого порядка в данной точке полагают значение самой функции, $f^{(0)}(x) = f(x)$.

Высшие производные наследуют некоторые свойства первых производных. В частности, для любого n имеем (предполагая, что соответствующие производные существуют):

1. $(f(x) + g(x))^{(n)} = (f(x))^{(n)} + (g(x))^{(n)}$,
2. если $C = const$, $(C \cdot f(x))^{(n)} = C \cdot (f(x))^{(n)}$.

Задачи.

1. $f(x) = e^{-x^2}$. Вычислить $f''(x)$.
2. $f(x) = x^{3/5}$. Вычислить $f'''(x)$.
3. $f(x) = x \sin^2 x$. Вычислить $f'''(x)$.
4. $f(x) = x \ln x$. Вычислить $f^{(4)}(x)$.
5. $f(x) = e^x \cos x$. Вычислить $f'''(x)$.

6.2 Определение и свойства дифференциалов высших порядков

Пусть функция $f(x)$ на интервале (a, b) обладает производными вплоть до порядка n включительно, $x_0 \in (a, b)$.

Определение. Дифференциалом порядка n функции $f(x)$ в точке x_0 называется выражение

$$d^n f(x_0, \Delta x) = f^{(n)}(x_0)(\Delta x)^n.$$

Дифференциалы определены с помощью производных, так что они наследуют некоторые свойства производных.

1. $d^n(f(x) + g(x))(x_0, \Delta x) = d^n f(x_0, \Delta x) + d^n g(x_0, \Delta x)$ в предположении о существовании производных порядка n у обеих функций $f(x)$, $g(x)$.
2. $d^n(C \cdot f(x))(x_0, \Delta x) = C \cdot d^n f(x_0, \Delta x)$ для любой константы C.

6.3 Теорема Тейлора.

Теорема. Пусть функция $f(x)$ имеет на интервале (a, b) непрерывные производные порядка вплоть до $N + 1$, точка $x_0 \in (a, b)$. Тогда для любого $x \in (a, b)$ существует точка ξ, лежащая между x и x_0 такая, что выполняется равенство

$$f(x) = \sum_{k=0}^{N} \frac{f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k}{k!} + \frac{f^{(N+1)}(\xi)(x - x_0)^{N+1}}{(N + 1)!}. \qquad (12)$$

.

Величина
$$R_N(x) = \frac{f^{(N+1)}(\xi)(x-x_0)^{N+1}}{(N+1)!}$$
называется остаточным членом формулы Тейлора в форме Лагранжа. Есть иные формулировки теоремы Тейлора, для которых остаточный член имеет несколько отличную форму.

Точку x_0 называют опорной точкой формулы Тейлора. Если $x_0 = 0$, формулу Тейлора называют формулой МакЛорена.

В приложениях формулу Тейлора используют следующим образом. Если остаточный член по каким-то причинам мал, так что его величиной можно пренебречь, то из формулы Тейлора можно извлечь приближенное аналитическое описание функции. Заметим, что величина $(N+1)!$ быстро растет с увеличением N, так что если высшие производные функции ограничены, остаточный член может быть сделан выбором N достаточно малым.

Замечание. Если обозначить $x - x_0 = \Delta x$, то нетрудно заметить, что в правой части формулы Тейлора под знаком суммы в числителях стоят дифференциалы функции $f(x)$ порядка k.

Пример. Выпишем формулу Тейлора первого порядка, для $N = 0$. Напомним, что $0! = 1$, так что формула (12) дает для функции $f(x)$, обладающей непрерывной производной первого порядка:
$$f(x) = f(x_0) + f'(\xi)(x - x_0). \tag{13}$$
Это, по существу, формула Лагранжа конечных приращений.

Пример. Нам потребуется формула Тейлора следующего порядка, выписанная для $N = 1$. Выписывая ее для функции $f(x)$, обладающей непрерывными производными первого и второго порядка, получаем:
$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(\xi)(x - x_0)^2. \tag{14}$$

Задачи.

1. Применив формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа к функции $f(x) = e^x$, вычислить с абсолютной погрешностью не больше 0.001 значение $e^{0.11}$.
2. Разложить многочлен $f(x) = x^4 - 4x^3 - 2x - 3$ по степеням двучлена $x - 2$.
3. Написать формулу Тейлора 3-го порядка для функции $f(x) = \arcsin 2x$ при $x_0 = 0$.
4. Написать формулу Тейлора 4-го порядка для функции $f(x) = xe^x$ при $x_0 = 0$.

6.4 Формула Тейлора для некоторых функций.

Формула Тейлора легко выписывается в явном виде для тех функций, для которых нетрудно вычислить производные любого порядка. Здесь приведены ряд примеров в этом направлении. Мы будем выписывать формулы Тейлора для случая $x_0 = 0$, для других значений x_0 формулы могут быть получены с помощью соответствующей модификации.

1. Рассмотрим функцию $f(x) = e^x$. Для этой функции нетрудно вычислить производные произвольного порядка: $(e^x)^{(n)} = e^x$. Эти производные в точке $x_0 = 0$ обращаются в единицу, так что формула Тейлора для данной функции имеет вид:
$$e^x = \sum_{k=0}^{N} \frac{x^k}{k!} + \frac{e^{\xi}x^{N+1}}{(N+1)!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^N}{N!} + \frac{e^{\xi}x^{N+1}}{(N+1)!}.$$

Напомним, что число ξ располагается между 0 и x. Уже для $N = 10$ остаточный член при $|x| < 1$ меньше, чем $3 \cdot 10^{-6}$, так что уже первых 10 слагаемых достаточно для вычисления этой функции с точностью $3 \cdot 10^{-6}$ при $|x| < 1$. 2. Рассмотрим функцию $f(x) = \sin x$. Для этой функции также можно вычислить все производные. А именно, $(\sin x)' = \cos x = \sin(x+\pi/2)$, так что $(\sin x)^{(n)} = \sin(x+\pi n/2)$ при всех n. Вычисляя значения производных при $x_0 = 0$, находим: $\sin(x_0 + \pi(m + 1/2)) = (-1)^m$, $\sin(x_0 + \pi m) = 0$. Соответственно, формула Тейлора для данной функции содержит только нечетные слагаемые и в итоге получаем:

$$\sin x = \sum_{m=0}^{N} \frac{(-1)^m x^{2m+1}}{(2m+1)!} + \frac{(-1)^{N+1} x^{2N+2} \sin\xi}{(2N+2)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots$$

$$+ \frac{(-1)^N x^{2N+1}}{(2N+1)!} + \frac{(-1)^{N+1} x^{2N+2} \sin\xi}{(2N+2)!}.$$

Здесь число ξ располагается между 0 и x. В этой формуле знаменатель в остаточном члене растет еще быстрее, так что уже 5 слагаемых достаточно для вычисления значения $\sin x$ с точностью порядка 10^{-6} при $|x| < 1$.

3. Следующим примером будет функция $\cos x$, для которой значения производных также нетрудно вычислить: $(\cos x)' = \sin x = \cos(x - \pi/2)$. Соответственно, $(\cos x)^{(n)} = \cos(x - \pi n/2)$, так что производные в точке $x_0 = 0$ также нетрудно сосчитать. $\cos(x_0 - \pi m) = (-1)^m$, $\cos(x_0 - \pi(m + 1/2)) = 0$. Таким образом, только четные производные в этой точке отличны от 0, так что формула Тейлора будет содержать только четные слагаемые. В итоге:

$$\cos x = \sum_{m=0}^{N} \frac{(-1)^m x^{2m}}{(2m)!} + \frac{(-1)^{N+1} x^{2N+1} \cos\xi}{(2N+1)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots$$

$$+ \frac{(-1)^N x^{2N}}{(2N)!} + \frac{(-1)^{N+1} x^{2N+1} \cos\xi}{(2N+1)!}.$$

7 Приложения дифференциального исчисления

Производные функций и дифференцирование появляются в разных научных и инженерных задачах. Здесь приведено обсуждение только небольшого числа математических задач, в которых применение дифференциального исчисления является ключевым элементом.

7.1 Монотонность функции и знак ее производной

Простейшие применения дифференциального исчисления связаны с изучением поведения функций.

С помощью теоремы Лагранжа (формулы Тейлора первого порядка) можно доказать следующий результат.

Теорема. Пусть $f(x)$ дифференцируема на интервале (a, b). Тогда

1. Если она монотонно возрастает на этом интервале, то ее производная $f'(x)$ на этом интервале не отрицательна.

2. Если $f'(x) > 0$ на интервале (a, b), то $f(x)$ монотонно возрастает на этом интервале.

Доказательство. Для доказательства первой части достаточно выписать отношение

$$A(x_0, \Delta x) = \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$

которое в пределе при $\Delta x \to 0$ стремится к $f'(x_0)$. Пусть $\Delta x > 0$, тогда по условию теоремы и числитель, и знаменатель этого выражения положительны. Переходя к пределу, получаем, что $f'(x_0) \geq 0$.

Для доказательства второй части достаточно написать формулу конечных приращений Лагранжа для двух любых двух точек $x_1, x_2 \in (a, b)$, $x_1 < x_2$:

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1).$$

Здесь точка ξ лежит между x_1, x_2. В правой части равенства оба сомножителя положительны, так что имеем монотонность функции.

Контрольный вопрос. Сформулируйте аналогичный результат для монотонно убывающих функций.

Задачи. Найти интервалы монотонности функции

1. $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 2$.
2. $f(x) = x - e^x$.
3. $f(x) = x^2 - 2\ln x$.

7.2 Достаточное условие локального максимума/минимума

С помощью формулы Тейлора второго порядка можно вывести достаточное условие локального максимума/минимума. Напомним, что необходимое условие описано в теореме Ферма.

Теорема. Пусть $f(x)$ имеет непрерывную вторую производную на интервале (a, b). Для того, чтобы точка $x_0 \in (a, b)$ была локальным максимумом функции $f(x)$, достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:

1. $f'(x_0) = 0$.
2. $f''(x_0) < 0$.

Доказательство. Выпишем формулу Тейлора второго порядка для функции $f(x)$ с опорной точкой x_0:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + f''(\zeta)\frac{(x - x_0)^2}{2},$$

где $\zeta \in (x_0, x)$. Как следует из условий теоремы, второе слагаемое справа равно нулю, а т.к. $f''(x)$ непрерывна, $f''(x_0) < 0$, то $f''(\zeta) < 0$ при всех ζ, достаточно близких к x_0. Таким образом, для достаточно близких к x_0 значений x имеем:

$$f(x) = f(x_0) + f''(\zeta)\frac{(x - x_0)^2}{2} < f(x_0).$$

ч.т.д.

Если во втором неравенстве теоремы поменять знак, мы получим достаточное условие для локального минимума. Решения уравнения $f'(x) = 0$ называются экстремальными точками. Вообще говоря, не все из них будут либо локальными максимумами, либо локальными минимумами. Среди них могут находиться и т.н. точки перегиба (подробнее о них см. в разделе о выпуклости функций).

Задачи. Найти экстремальные точки функции и выяснить их характер.

1. $f(x) = x^2 - 6x + 8$.
2. $f(x) = x^2(x - 4)$.
3. $f(x) = \sin x - x$.
4. $f(x) = \sin x - x + x^3/3$.
5. $f(x) = x - ln(1 + x)$.

7.3 Решение задачи о глобальном максимуме/минимуме функции на замкнутом отрезке

Рассмотрим задачу о поиске **глобального максимума** (наибольшего значения) и **глобального минимума** (наименьшего значения) функции $f(x)$ на замкнутом интервале $[a, b]$. Будем считать, что $f(x)$ обладает непрерывной производной на этом интервале. Из наших предположений следует, что $f(x)$ - непрерывная функция на $[a, b]$. По теореме о непрерывных функциях эта функция достигает на замкнутом интервале $[a, b]$ свои наибольшее M и наименьшее m значения. Задача - найти точки $c_1, c_2 \in [a, b]$, такие, что $f(c_1) = M$, $f(c_2) = m$, и вычислить значения M и m.

Процедуру нахождения c_1, c_2 с учетом описанных выше результатов можно построить следующим образом. Найдем сначала набор стационарных точек, т.е. решений уравнения $f(x) = 0$, принадлежащих интервалу $[a, b]$. Пусть это будут точки $x_1, x_2, ..., x_k$. Среди этих точек могут быть точки локальных максимумов, точки локальных минимумов, точки перегиба. Затем составляем список "подозрительных"точек, это точки $\{x_1, x_2, ..., x_k, a, b\}$. Вычисляем значение функции $f(x)$ в этих точках, $\{f(x_1), f(x_2), ..., f(x_k), f(a), f(b)\}$. Находим среди них наибольшее значение - это и будет M, находим среди них наименьшее значение - это и будет m. Одновременно определяем те точки, в которых функция принимает значения M и m.

Задачи.

1. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $f(x) = x^5 - 5x^3/3 + 2$ на интервале $[0, 2]$.
2. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $f(x) = x^3 - 6x$ на интервале $[-3, 4]$.
3. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $f(x) = 3x^4 - 16x^3 + 2$ на интервале $[-3, 1]$.
4. Найти стороны прямоугольника наибольшего периметри, вписанного в полуокружность радиуса R.
5. Окно имеет форму прямоугольника, завершенного сверху полукругом. Какими должны быть размеры, если фиксирован периметр окна, а площадь должна быть наибольшей?
6. Кусок проволоки имеет фиксированную длину. Ее разрезают на 2 части, затем из одной делают квадрат, из второй - окружность. Как надо разрезать проволоку, чтобы сумма площадей круга и квадрата была наибольшей?
7. Найти соотношение между радиусом R и высотой H цилиндра, имеющего при данном объеме наименьшую полную площадь поверхности.
8. Найти высоту конуса наибольшего объема, который можно вписать в шар радиуса R.

7.4 Выпуклость вверх, выпуклость вниз, точки перегиба

С помощью формулы Тейлора второго порядка можно более детально описать поведение функции.

Определение. Функция $f(x)$ называется **выпуклой вверх** в точке x_0, если в некоторой окрестности этой точки график функции лежит ниже касательной к графику в этой точке.

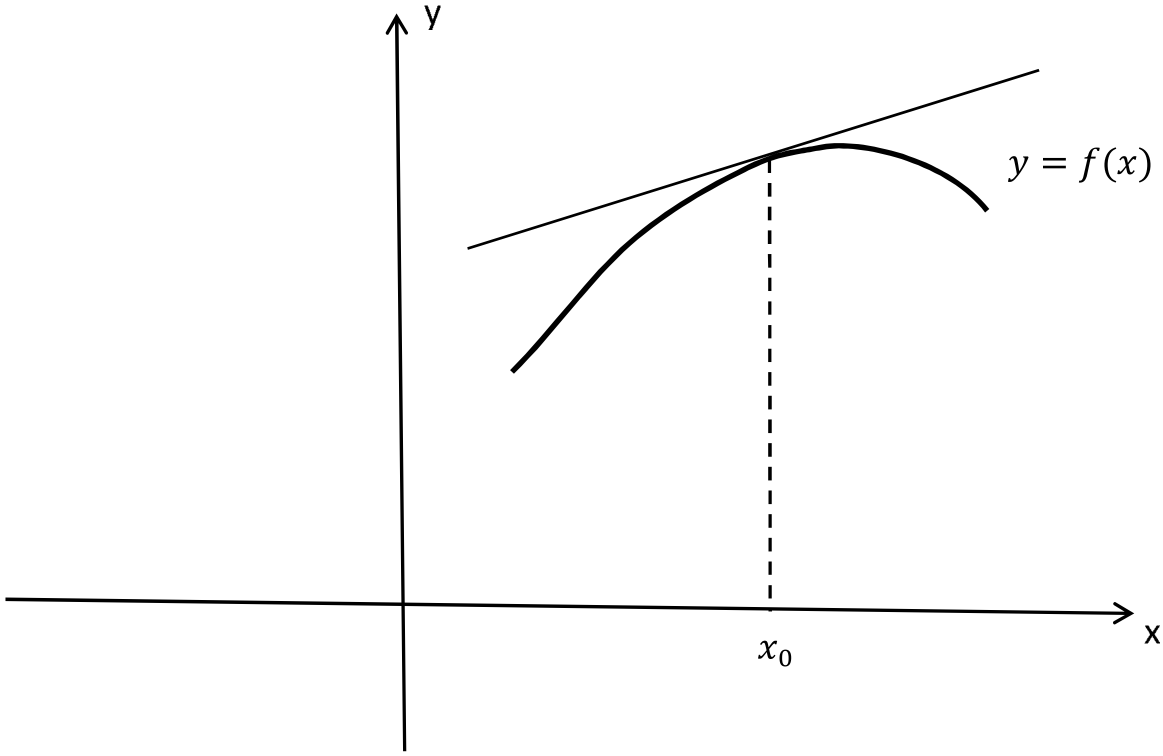

Рис. 6: Выпуклая вверх в точке x_0 функция.

Эта ситуация изображена на рис. 6. Аналогично определяется и **выпуклость вниз**.

Определение. Точка называется **точкой перегиба**, если в некоторой окрестности точки слева от этой точки и справа от нее функция имеет разный характер выпуклости (например, в точках слева - выпуклость вверх, в точках справа - выпуклость вниз).

Теорема. Пусть $f(x)$ имеет непрерывную вторую производную на интервале (a, b). Если на этом интервале $f''(x) < 0$, функция $f(x)$ является выпуклой вверх во всех точках этого интервала.

Доказательство. Для доказательства выпишем формулу Тейлора второго порядка для функции $f(x)$:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(\xi)(x - x_0)^2,$$

где точка ξ лежит между точками x и x_0. Последнее слагаемое, согласно условиям теоремы, отрицательно, так что

$$f(x) < f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Однако уравнение касательной к графику, проходящей через точку $(x_0, f(x_0))$ как раз совпадает с выражением, выписанном справа: $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. Таким образом, график функции лежит ниже графика касательной. Выбор точки $x_0 \in (a, b)$ был произволен, так что функция выпукла вверх во всех точках интервала (a, b).

Аналогичный результат (с переменой знака второй производной) может быть сформулирован и для выпуклости вниз.

В соответствии с этими результатами для функции, имеющей непрерыную вторую производную, точками перегиба являются те точки, в которых вторая производная меняет знак.

Пример. Рассмотрим функцию $f(x) = x^3$. Вычислим ее вторую производную, получим $f''(x) = 6x$. При $x > 0$ вторая производная положительна - так что функция при этих x выпукла вниз. При $x < 0$ вторая производная отрицательна - так что функция при этих x выпукла вверх. В точке $x = 0$ имеем точку перегиба - слева и справа от нее характер выпуклости функции разный.

Задачи.

1. Показать, что функция $f(x) = x^2 + x^4$ везде выпукла вниз.

2. При каких значениях a, b точка $A(3, 1)$ является точкой перегиба кривой $f(x) = ax^2 + bx^3$?

8 Первообразная (неопределенный интеграл)

8.1 Определение и основные свойства

Если мы имеем какую-то операцию, то естественно поставить и обсудить вопрос о ее обращении. Дифференцирование функций можно рассматривать как операцию D, которая из заданной функции "изготавливает"новую функцию, ее производную: $f(x) \xrightarrow{D} f'(x)$. Рассмотрим задачу обращения этой операции: для заданной функции $g(x)$ найти такую функцию $G(x)$, что выполняется равенство:

$$\frac{dG(x)}{dx} = g(x). \tag{15}$$

Определение. Функция $G(x)$, удовлетворяющая соотношению (15), называется **первообразной** функции $g(x)$ (или: **неопределенным интегралом** от функции $g(x)$).

Обозначение. Функцию $G(x)$, удовлетворяющую соотношению (15), обозначают

$$G(x) = \int g(x)dx.$$

Пример. Известно, что $(\sin x)' = \cos x$. Поэтому функция $\sin x$ является первообразной функции $\cos x$.

Из свойств операции дифференцирования следует, что если $G(x)$ - первообразная функции $g(x)$, то для любой константы C функция $G(x) + C$ также является первообразной функции $g(x)$. Это следует из простого вычисления:

$$\frac{d}{dx}(G(x) + C) = \frac{d}{dx}G(x) + \frac{d}{dx}C = g(x) + 0.$$

Вопрос: сколько первообразных может быть у функции?

Теорема. Пусть $G(x)$ - первообразная непрерывной функции $g(x)$. Тогда любая первообразная этой функции лишь на константу отличается от $G(x)$.

Доказательство. Пусть $F(x)$ - еще одна первообразная функции $g(x)$, положим $H(x) = F(x) - G(x)$. Тогда $dH(x)/dx = 0$ при всех x. Применим теорему Лагранжа к функции $H(x)$. Для любых точек x_1 и x_2 имеем: $H(x_1) - H(x_2) = 0 \cdot (x_1 - x_2) = 0$. Следовательно, значение $H(x)$ не зависит от x.

Свойства первообразной тесно связаны со свойствами, которыми обладает операция дифференцирования.

1. Первообразная от суммы функций равна сумме первообразных,

$$\int (f(x) + g(x))\, dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx.$$

2. Константу можно вынести за знак интеграла: если $C = const$, то

$$\int C \cdot f(x)dx = C \cdot \int f(x)dx.$$

3. При дифференцирование первообразной получается исходная функция,

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x).$$

4. Пусть $\int f(x)dx = F(x)$, $a, b = const$. Тогда

$$\int f(ax + b)dx = \frac{1}{a}F(ax + b).$$

Все эти сотношения легко проверяются с помощью дифференцирования.

Пример. Рассмотрим пример на последнее свойство. Вычислим интеграл

$$\int \frac{1}{3x + 5}dx.$$

В данном случае $a = 3, b = 5, f(x) = 1/x$, так что $F(x) = lnx$. В итоге получаем:

$$\int \frac{1}{3x + 5}dx = \frac{1}{3}ln(3x + 5) + C.$$

8.2 Таблица основных первообразных

Таблицу первообразных можно получить, переписывая таблицу производных. Ее можно проверить дифференцированием.

1.
$$\int x^\alpha\, dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha + 1} + C, \quad \alpha \neq 1.$$

   Частные случаи:

$$\int 1 \cdot dx = x + C,$$

$$\int x dx = \frac{x^2}{2} + C.$$

2.
$$\int \frac{1}{x}\, dx = lnx + C.$$

3.
$$\int e^x\, dx = e^x + C.$$

4.
$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{lna} + C.$$

5.
$$\int \cos x\,dx = \sin x + C.$$

6.
$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C.$$

7.
$$\int tgx\,dx = -ln(\cos x) + C.$$

8.
$$\int ctgx\,dx = ln(\sin x) + C.$$

9.
$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = arcsinx + C.$$

10.
$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = arctgx + C.$$

11.
$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = ln(x + \sqrt{1+x^2}) + C.$$

12.
$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \operatorname{tg} x + C.$$

13.
$$\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\operatorname{ctg} x + C.$$

Задачи. Вычислить первообразные.

1.
$$\int (3x^3 - 2x^4 + 7)dx\,.$$

2.
$$\int \sqrt{x}dx.$$

3.
$$\int a^x b^x dx.$$

4.
$$\int \cos(3x-4)dx.$$

5. $$\int \frac{5 - 3\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[5]{x}}{\sqrt[3]{x}} dx.$$

6. $$\int \frac{1 - x^2}{x^2(1 + x^2)} dx.$$

7. $$\int \sin(2x + 7) dx.$$

8. $$\int \frac{(1 - x)^3}{x\sqrt{x}} dx.$$

9. $$\int \left(\frac{1 - x}{x}\right)^2 dx.$$

10. $$\int (\sqrt{x} + 1)(x + 1) dx.$$

11. $$\int \frac{dx}{x^2}.$$

12. $$\int \cos^2(2x + 3) dx.$$

13. $$\int \frac{dx}{1 - \cos 2x}.$$

14. $$\int \frac{\sin^4 x dx}{\cos^2 x}.$$

8.3 Интегрирование по частям

Выпишем производную от произведения функций. Согласно формуле Лейбница,

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

В терминах первообразной это соотношение означает, что $f(x)g(x)$ является первообразной правой части, так что формулу Лейбница можно записать следующим образом:

$$\int \left(f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\right) dx = f(x)g(x).$$

Немного преобразуем это соотношение,

$$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx.$$

Эта формула и называется **формулой интегрирования по частям в первообразной**. Ее используют для вычисления некоторых интегралов. Она позволяет "перебросить"дифференцирование с одного из сомножителей в подинтегральном выражении на другой. Иногда при этом получается более простой интеграл, чем исходный, или же появляется возможность вычислить исходный интеграл.

1. Возможны ситуации, когда производная $g'(x)$ является более "простой"функцией, чем сама функция $g(x)$. Это верно для функций $g(x) = x^k$, $k = 1, 2, 3, ...,\quad lnx,\quad arctgx,\quad arcsinx$.

2. Возможны ситуации, когда производная $g'(x)$ является функцией "такого же уровня сложности что и сама функция $g(x)$. Это верно для функций $g(x) = a^x,\quad \sin x,\quad \cos x$.

Пример. Вычислим интеграл

$$\int lnxdx.$$

В данном случае подинтегральное выражение можно представить в виде произведения 1 и lnx, так что в соответствии с общей схемой запишем: $f'(x) = 1$, $g(x) = lnx$. Тогда $f(x) = x$, $g'(x) = 1/x$, и мы имеем:

$$\int lnxdx = x \cdot lnx - \int x \cdot \frac{1}{x}dx = x \cdot lnx - \int 1 \cdot dx = x \cdot lnx - x + C.$$

Задачи. Вычислить первообразные.

1. $$\int xlnxdx.$$

2. $$\int x \sin xdx.$$

3. $$\int xe^{-x}dx.$$

4. $$\int xarctgxdx.$$

5. $$\int x \cos(2x)dx.$$

6. $$\int x \cos^2 xdx.$$

7. $$\int x4^x dx.$$

8. $$\int x^2 a^x dx.$$

8.4 Замена переменной в первообразной

В дифференциальном исчислении есть формула дифференцирования сложной функции. Ее аналог в интегральном исчислении - формула замены переменной в первообразной. Рассмотрим интеграл

$$F(x) = \int f(x)dx.$$

Предположим, что мы реализуем замену переменных $x = \phi(t)$. Как следует переписать интеграл в новых переменных?

Имеем $G(t) = F(\phi(t))$. Продифференцируем эту (сложную) функцию по t, получим

$$\frac{d}{dt}G(t) = \frac{d}{dx}F(x)|_{x=\phi(t)} \cdot \frac{d}{dt}\phi(t) = f(\phi(t))\phi'(t).$$

Таким образом, согласно определению первообразной, имеем:

$$F(\phi(t)) = \int f(\phi(t))\phi'(t)dt.$$

если вернуться к исходной переменной x, получим:

$$F(x) = \int f(\phi(t))\phi'(t)dt|_{t=\phi^{-1}(x)}.$$

Эти соотношения и позволяют реализовать замену переменной в первообразной.

Пример. Рассмотрим интеграл

$$I = \int \frac{x}{\sqrt{x+1}}dx.$$

В подинтегральной функции есть "неприятность квадратный корень. Чтобы ее устранить, реализуем замену переменной: $x = t^2 - 1$, $dx = 2tdt$. Подставляя эти соотношения в интеграл, находим:

$$I = \int \frac{t^2-1}{t} \cdot 2tdt = 2\int (t^2-1)dt = 2(t^3/3 - t) + C = \frac{2}{3}(x+1)^{3/2} - 2(x+1)^{1/2} + C.$$

Задачи. Вычислить первообразные.

1. $$\int \frac{\sqrt{lnx}}{x}dx.$$

2. $$\int \frac{x}{\sqrt[3]{x^2+1}}dx.$$

3. $$\int \frac{dx}{(arcsinx)^3\sqrt{1-x^2}}.$$

4. $$\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^8}}dx.$$

5.

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x(3tgx+1)}.$$

6.

$$\int \frac{\cos(3x)dx}{4+\sin(3x)}.$$

7.

$$\int \frac{dx}{1+\sqrt{x+1}}.$$

8.

$$\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x-1}}.$$

9.

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x-1}}.$$

10.

$$\int \frac{\sqrt{x}dx}{x+1}.$$

9 Техника вычисления первообразных

Вычисление первообразных опирается на несколько стандартных подходов. Пара из них (интегрирование по частям и замена переменных) обсуждались выше. Кроме того, есть несколько классов интегрируемых функций, для которых развита соответствующая техника. Основной из этих классов - дробно-рациональные функции, остальные классы сводятся к дробно-рациональным функциям с помощью подходящей замены переменной. Ниже мы перечислим некоторые из этих классов с указанием соответствующих замен (подстановок).

9.1 Интегралы от дробно-рациональных функций

9.1.1 Полиномы, основные свойства

Определение. Функция

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$$

называется **полиномом** (или многочленом) переменной x. Числа $a_0, a_1, ..., a_n$ называются **коэффициентами полинома** $P(x)$. Число n называется **степенью** полинома $P(x)$ (здесь предполагается, что $a_n \neq 0$). Степень полинома $P(x)$ обозначается $degP(x)$. Отдельное слагаемое называется одночленом. Одночлен с наибольшей степенью называется старшим в данном полиноме.

Пример. Функция $f(x) = ax^2 + bx + c$ является полиномом второго порядка, ее коэффициенты - числа c, b, a.

На языке линейной алгебры это определение означает, что $P(x)$ является линейной комбинацией конечного набора целых степеней переменной x. Ключевой здесь является конечность этого набора.

Полиномы обладают рядом важных свойств.

1. Полиномы определены при всех $x \in \mathbb{R}$ и являются бесконечно-дифференцируемыми функциями при всех x.

2. Сумма и произведение любого конечного числа полиномов является полиномом.

3. Производная любого порядка от полинома является полиномом.

4. Суперпозиция полиномов является полиномом: если $P(x)$, $Q(t)$ - полиномы переменных x и t соответственно, то $Q(P(x))$ является полиномом переменной x.

Аналогичным образом можно определить и полиномы от нескольких переменных. Полиномы от пескольких переменных также обладают описанными выше свойствами. Степень определяется как максимальная суммарная (по всем переменным) степень одночлена. Например, функция $f(x, y) = x + 2y + 3xy + 4x^2y^3$ является полиномом от переменных x, y причем степень этого полинома равна 2+3=5.

9.1.2 Дробно-рациональные функции, основные свойства

Определение. Пусть $P(x)$, $Q(x)$ - полиномы переменной x. Тогда выражение

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

называется **дробно-рациональной функцией** переменной x (или, короче, рациональной функцией).

Опишем свойства дробно-рациональных функций.

1. Они определены при всех x, отличных от нулей знаменателя, и являются в этой области определения бесконечно-дифференцируемыми функциями.

2. Сумма и произведение любого конечного числа дробно-рациональных функций является дробно-рациональной функцией.

3. Производная любого порядка от дробно-рациональной функции является дробно-рациональной функцией.

4. Суперпозиция дробно-рациональных функций является дробно-рациональной функцией: если $R(x)$, $S(t)$ - дробно-рациональные функции переменных x и t соответственно, то $S(R(x))$ является дробно-рациональной функцией переменной x.

Можно определить и дробно-рациональные функции нескольких переменных. Они также обладают описанными выше свойствами (при уточняющей формулировке).

9.1.3 Выделение целой части и разложение на простейшие для дробно-рациональных функций

Теория дробно-рациональных функций во многом подобна теории рациональных чисел. Напомним, что рациональное число $r = p/q > 0$ (p и q - целые положительные числа) называется правильным, если $p < q$ и неправильным, если $p > q$. Неправильное рациональное число можно представить в виде $r = n+s/q$, где n - целое число (называется целой частью r, а s/q - правильное рациональное число. Обычно это представление получают делением нацело p на q, при этом n - результат этого деления, а s - остаток.

Определение. Дробно-рациональная функция $R(x) = P(x)/Q(x)$ ($P(x), Q(x)$ - полиномы переменной x) называется **правильной**, если $degP(x) < degQ(x)$ (степень полинома $P(x)$ меньше степени полинома $Q(x)$). Если $degP(x) \geq degQ(x)$, дробно-рациональная функция $R(x)$ называется неправильной.

Теорема. Любую дробно-рациональную функцию $R(x)$ можно представить в виде суммы полинома $T(x)$ и правильной дробно-рациональной функции,

$$R(x) = T(x) + \frac{S(x)}{Q(x)},$$

$degS(x) < degQ(x)$. Полином $T(x)$ называется целой частью дробно-рациональной функции $R(x)$.

На практике это представление находят с помощью процедуры, носящей название "деление уголком".

Пример. Найдем целую часть дробно-рациональной функции

$$R(x) = \frac{3x^4 + 2x - 2}{x^2 + x}.$$

Выписываем в уголках числитель и знаменатель функции,

$$\begin{array}{l|l} 3x^4 + 2x - 1 & \underline{\;x^2 + x\;} \end{array}$$

Подбираем подходящий множитель для старшего одночлена знаменателя, так, чтобы их произведение совпадало со старшим одночленом числителя. В данном случае это $3x^2$. Результат умножения знаменателя подписываем под числителем (в этом месте "собирается"результат деления - целая часть дробно-рациональной функции) и вычитаем:

$$\begin{array}{ll}
3x^4 + 2x - 2 & \big|\,\underline{\;x^2 + x\;} \\
- & \quad 3x^2 \\
\underline{3x^4 + 3x^3} & \\
\qquad -3x^3 + 2x - 2 &
\end{array}$$

Результат вычитания подписываем под чертой. Далее, подбираем множитель, при умножении на который x^2 (старший одночлен знаменателя) дает $-3x^3$ (старший одночлен остатка). В данном случае это $-3x$, добавляем это выражение к целой части. Результат умножения знаменателя подписываем под остатком и вычитаем:

$$\begin{array}{ll}
3x^4 + 2x - 2 & \big|\,\underline{\;x^2 + x\;} \\
- & 3x^2 - 3x \\
\underline{3x^4 + 3x^3} & \\
\qquad -3x^3 + 2x - 2 & \\
\qquad - & \\
\qquad \underline{-3x^3 - 3x^2} & \\
\qquad\quad 3x^2 + 2x - 2 &
\end{array}$$

Подбираем множитель, при умножении на который x^2 (старший одночлен знаменателя) дает $3x^2$ (старший одночлен остатка). В данном случае это 3, добавляем это выражение к целой части. Результат умножения знаменателя подписываем под остатком и вычитаем:

$$\begin{array}{ll}
3x^4 + 2x - 2 & \big|\,\underline{\;x^2 + x\;} \\
- & 3x^2 - 3x + 3 \\
\underline{3x^4 + 3x^3} & \\
\qquad -3x^3 + 2x - 2 & \\
\qquad - & \\
\qquad \underline{-3x^3 - 3x^2} & \\
\qquad\quad 3x^2 + 2x - 2 & \\
\qquad\quad - & \\
\qquad\qquad \underline{3x^2 + 3x} & \\
\qquad\qquad -x - 2 &
\end{array}$$

Последний остаток имеет степень меньше, чем знаменатель. В этом месте процедура останавливается и мы получаем:

$$\frac{3x^4+2x-2}{x^2+x}=3x^2-3x+3+\frac{-x-2}{x^2+x},$$

искомое представление дробно-рациональной функции в виде суммы целой части $3x^2-3x+3$ и правильной дробно-рациональной функции.

Определение. Дробно-рациональная функция

$$r(x)=\frac{a}{(x-b)^k},\quad k=1,2,3,...$$

называется **простейшей** дробно-рациональной функцией.

Это определение связано с тем, что первообразные от таких функций вычисляются достаточно просто.

$$\int\frac{a}{(x-b)^k}dx=\begin{cases}a\cdot ln(x-b)+C, & k=1,\\ a\cdot\frac{(x-b)^{1-k}}{1-k}+C, k=2,3,4,...\end{cases}$$

Теорема. Любая правильная дробно-рациональная функция может быть представлена в виде суммы простейших дробно-рациональных функций.

Пример. Разложим в сумму простейших дробно-рациональную функцию

$$R(x)=\frac{x+2}{(x-1)(x+1)}.$$

В знаменателе присутствуют $(x-1)$ и $(x+1)$ в первой степени. Соответственно, полагаем

$$\frac{x+2}{(x-1)(x+1)}=\frac{\alpha}{x-1}+\frac{\beta}{x+1},$$

где в знаменателе стоят соответственно первые степени $(x-1)$ и $(x+1)$, а параметры α, β подлежат определению. Приводя правую часть к общему знаменателю, получаем:

$$\frac{x+2}{(x-1)(x+1)}=\frac{\alpha(x+1)+\beta(x-1)}{(x-1)(x+1)}.$$

Приравнивая числители, находим:

$$x+2=\alpha(x+1)+\beta(x-1).$$

Это равенство должно выполняться при всех x. Подставляем $x=1$, находим $\alpha=3/2$, подставляя $x=-1$, находим $\beta=-1/2$.

9.1.4 Вычисление первообразной от дробно-рациональной функции

Итак, согласно результатам, приведенным в предыдущем пункте, любая дробно-рациональная функция может быть представлена в виде суммы полинома (целая часть исходной дробно-рациональной функции) и простейших. Интеграл от полинома сводится к вычислению интеграла от линейной комбинации целых степеней независимой переменной,

$$\int T(x)dx=\int\sum_{k=0}^{m}T_kx^kdx=\sum_{k=0}^{m}T_k\int x^kdx=\sum_{k=0}^{m}\frac{x^{k+1}}{k+1}+C.$$

Интегралы от простейших вычисляются согласно приведенным выше формулам.

Теорема. Первообразная от любой дробно-рациональной функции вычисляется в явном виде, в замнутой аналитической форме.

Задачи. Вычислить первообразные.

1.
$$\int \frac{dx}{x^2 - x}.$$

2.
$$\int \frac{dx}{(2x+3)^2}.$$

3.
$$\int \frac{dx}{2x^2 - 2x + 3}.$$

4.
$$\int \frac{(x^2+2)dx}{x^3 + x^2 - 2x}.$$

5.
$$\int \frac{dx}{x^3 + x^2 + 2x + 2}.$$

6.
$$\int \frac{x^2dx}{x^2 - 4x + 3}.$$

7.
$$\int \frac{xdx}{(x+1)(2x-1)}.$$

8.
$$\int \frac{x^5 + x^4 - 8}{x^3 - 4x}dx.$$

9.
$$\int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)}.$$

10.
$$\int \frac{dx}{(x-2)^2(x+2)^2}.$$

11.
$$\int \frac{dx}{x^4 - 1}.$$

9.2 Интегралы от тригонометрических функций

Рассмотрим интегралы вида
$$I = \int R(\sin x, \cos x)dx, \tag{16}$$
где $R(u, s)$ - дробно-рациональная функция своих аргументов. Существует несколько подходов к их вычислению. В их основе - сведение интеграла (16) с помощью подходящей замены переменной к интегралу от дробно-рациональной функции.

1. Универсальная тригонометрическая подстановка.

Эта подстановка реализуется с помощью соотношений
$$t = tg(x/2), \quad x = 2arctgt, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2},$$

$$\sin x = \frac{2\sin(x/2)\cos(x/2)}{1} = \frac{2\sin(x/2)\cos(x/2)}{\sin^2(x/2)+\cos^2(x/2)} = \frac{2tg(x/2)}{1+tg^2(x/2)} = \frac{2t}{1+t^2},$$

$$\cos x = \frac{\cos^2(x/2)-\sin^2(x/2)}{1} = \frac{\cos^2(x/2)-\sin^2(x/2)}{\sin^2(x/2)+\cos^2(x/2)} = \frac{1-tg^2(x/2)}{1+tg^2(x/2)} = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Подставляя в интеграл (16), получаем:

$$I = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \cdot \frac{2dt}{1+t^2}.$$

В аргументах функции $R(u, s)$ под интегралом - дробно-рациональные функции переменной t. Используя описанные выше свойства дробно-рациональных функций, приходим к выводу, что все подинтегральное выражение представляет собой дробно-рациональную функцию переменной t. Таким образом, интеграл можно вычислить в явном виде как функцию переменной t, а затем вернуться к переменной x, подставляя $t = tg(x/2)$.

Универсальная тригонометрическая подстановка иногда приводит к слишком громоздким вычислениям. Если функция $R(u, s)$ обладает дополнительными свойствами, можно их сократить, используя другие подстановки.

2. Если интеграл (16) можно свести к виду

$$I = \int W(\sin x)\cos x dx,$$

где $W(t)$ - дробно-рациональная функция переменной t, следует применять подстановку $t = \sin x$, так что $\cos x dx = dt$. Заметим, что если $R(u, s)$ нечетна по переменной s, то такое сведение возможно.

3. Аналогичным образом, если интеграл (16) можно свести к виду

$$I = \int W(\cos x)\sin x dx,$$

где $W(t)$ - дробно-рациональная функция переменной t, следует применять подстановку $t = \cos x$, так что $\sin x dx = -dt$. Это возможно, если функция $R(u, s)$ в интеграле (16) является нечетной по u.

4. Если в интеграле (16) функция $R(u, s)$ четна по обеим переменным, можно использовать подстановку $t = tgx$.

5. Если интеграл (16) можно привести к виду

$$I = \int W(tgx)dx,$$

где $W(t)$ - дробно-рациональная функция, то рекомендуется подстановка $t = tgx$.

Задачи. Вычислить первообразные.

1.
$$\int \sin 2x \cos 5x dx.$$

2.
$$\int \sin^2 x \cos^2 x dx.$$

3.
$$\int \sin(3x+4)\sin(4x-1)dx.$$

4.
$$\int \frac{\cos 3x}{4+3\sin 3x}dx.$$

5.
$$\int \frac{\cos x}{1+\cos x}dx.$$

6.
$$\int \frac{\sin x}{\cos^5 x}dx.$$

7.
$$\int \frac{dx}{\sin^2 x\cos^4 x}.$$

8.
$$\int \frac{1}{1+\cos x+\sin x}dx.$$

9.
$$\int \frac{\sin(2x)dx}{1+\sin^2 x}.$$

10.
$$\int \frac{dx}{\sin x(2\cos^2 x-1)}.$$

11.
$$\int \frac{dx}{5+3\cos x+4\sin x}.$$

12.
$$\int \frac{dx}{\cos x+3tgx}.$$

9.3 Интегралы от функций, содержащих иррациональности

Рассмотрим интегралы вида
$$I=\int R(x,\sqrt[n]{x},\ \sqrt[m]{x},...,\sqrt[k]{x})dx,$$
где $R(x,y,t,...,s)$ - дробно-рациональная функция своих аргументов, $n,m,...,k$ -целые положительные числа. Пусть N - наименьшее общее кратное чисел $n,m,...,k$, положим $x=t^N$. Тогда $\sqrt[n]{x}=t^{N/n}=t^p$, причем p - целое число. Аналогичным образом и выражения $\sqrt[m]{x},...,\sqrt[k]{x}$ представляют собой t в целых степенях. При этом $dx=Nt^{N-1}dt$, так что
$$I=\int R(t^N,t^p,...,t^q)\cdot Nt^{N-1}dt,$$
и мы приходим к выводу, что под интегралом - дробно-рациональная функция переменной t. Соответственно, этот интеграл можно вычислить в явном виде и затем вернуться к переменной x, подставляя $t=\sqrt[N]{x}$.

Аналогичным образом можно вычислить и интеграл вида

$$I = \int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}, ..., \sqrt[k]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx,$$

где $R(x, y, t, ..., s)$ - дробно-рациональная функция своих аргументов, $n, m, ..., k$ -целые положительные числа, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. В данном случае следует применять подстановку

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^N,$$

N - наименьшее общее кратное чисел $n, m, ..., k$. Простые вычисления показывают, что и в данном случае эта подстановка приведет интеграл к интегралу от дробно-рациональной функции переменной t.

Задачи. Вычислить первообразные.

1. $$\int \sqrt[3]{x}(\sqrt{x}+1)^3\, dx.$$

2. $$\int \frac{1}{1+\sqrt[3]{x+1}}\, dx.$$

3. $$\int \frac{1}{\sqrt{x+3}+\sqrt[3]{(x+3)^2}}\, dx.$$

4. $$\int \frac{x^2+\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x+1}}\, dx.$$

5. $$\int \frac{\sqrt{x+5}}{\sqrt[3]{x+5}+1}\, dx.$$

6. $$\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+2\sqrt[4]{x}}.$$

7. $$\int x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\, dx.$$

9.4 Подстановки Эйлера

Применяются при вычислении интегралов вида

$$I = \int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx, \tag{17}$$

где $R(x, s)$ - дробно-рациональная функция своих аргументов. В зависимости от значения параметров a, b, c применяют одну из трех подстановок Эйлера.

1 подстановка Эйлера. Если $a > 0$ то для вычисления интеграла (17) применяют подстановку, определяемую соотношением

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}x + t. \tag{18}$$

Из этого соотношения находим:

$$x = \frac{t^2-c}{b-2\sqrt{a}t},$$

так что $x(t)$ является дробно-рациональной функцией. Согласно (18), $\sqrt{ax^2+bx+c}$ также является дробно-рациональной функцией. В итоге приходим к выводу, что после перехода к переменной t подинтегральная функция в (17) является дробно-рациональной функцией от переменной t. Соответственно, его можно вычислить в явном виде и затем, подставляя $t = \sqrt{ax^2+bx+c} - \sqrt{a}x$, вернуться к переменной x.

Пример. Рассмотрим интеграл

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Полагая

$$\sqrt{1+x^2} = x + t,$$

находим:

$$x = \frac{1}{2t} - \frac{t}{2}, \quad dx = -\left(\frac{1+t^2}{2t^2}\right)dt.$$

Подставляя в интеграл, получаем:

$$I = \int \frac{-\frac{1+t^2}{2t^2}}{t+\frac{1}{2t}-\frac{t}{2}}dt = -\int \frac{dt}{t} = -lnt + C = C - ln(\sqrt{1+x^2}-x).$$

2 подстановка Эйлера. Если $c > 0$, то можно применять подстановку, определяемую соотношением

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = xt + \sqrt{c}.$$

Отсюда находим:

$$x = \frac{2\sqrt{c}t - b}{a-t^2}.$$

таким образом, $x(t)$ - дробно-рациональная функция переменной t. Подстановка в интеграл приводит к выводу, что подинтегральное выражение становится дробно-рациональной функцией переменной t, а значит, интеграл может быть вычислен в явных терминах.

3 подстановка Эйлера. Пусть α, β - корни полинома $ax^2 + bx + c$. Полагая

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a(x-\alpha)(x-\beta)} = (x-\alpha)t,$$

получаем

$$x = \frac{a\beta - \alpha t^2}{a-t^2},$$

т.е. $x(t)$ - дробно-рациональная функция переменной t. Подстановка в интеграл приводит к выводу, что подинтегральное выражение становится дробно-рациональной функцией переменной t, а значит, интеграл может быть вычислен в явных терминах.

Задачи. Вычислить первообразные.

1.
$$\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx.$$

2.
$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}}.$$

3.
$$\int \frac{1}{x+\sqrt{1+x+x^2}}dx.$$

4.
$$\int \frac{1}{1+\sqrt{2+x+x^2}}dx.$$

5.
$$\int \frac{dx}{x\sqrt{2+x-x^2}}.$$

6.
$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+4x-4}}.$$

9.5 "Неберущиеся"интегралы

Когда идет речь о вычислении первообразной, имеют в виду, что результат можно выразить в терминах уже известных ранее функций явным образом. Однако это не всегда возможно. Интегралы от сравнительно простых функций не всегда можно вычислить. Например, интеграл
$$I(x) = \int \frac{\sin x}{x}dx$$
не выражается в терминах "элементарных"функций. Это означает, что такие интегралы представляют собой новый тип функций. На практике наличие таких объектов не приводит к затруднениям, поскольку определенные интегралы можно вычислить с помощью компьютеров, а необходимую аналитическую информацию (например, поведение в окрестности особых точек) можно извлечь прямо из интегрального представления таких функций.

10 Определенный интеграл

Это понятие является одним из основных понятий математического анализа и его основные элементы восходят к Архимеду.

10.1 Определение

Пусть задан интервал $[a, b]$, $a < b$, на нем задана функция $f(x)$ (будем считать ее непрерывной). Разобъем отрезок на N подинтервалов, длины их обозначим $\Delta x_k, \quad k = 1, 2, ..., N$. Выберем в каждом подинтервале по точке, обозначим их $x_k, \quad k = 1, 2, ..., N$. Способ разбиения на подинтервалы и выбора точек в подинтервалах условно обозначим σ. Положим
$$S_\sigma = \sum_{k=1}^{N} f(x_k)\Delta x_k.$$

Величина S_σ называется **интегральной суммой**, соответствующей σ. Положим $\Delta_\sigma = max_{1\le k\le N}\Delta x_k$. Вопрос: что будет происходить с S_σ, когда $\Delta_\sigma \to 0$?

Определение. Пусть существует конечный предел

$$\lim_{\Delta_\sigma\to 0} S_\sigma = I,$$

не зависящий от способа разбиения σ. Тогда говорят, что $f(x)$ интегрируема на интервале $[a, b]$, а само это число обозначают

$$I = \int_a^b f(x)dx.$$

Числа a, b называют нижним и верхним пределами интегрирования соответственно, $f(x)$ - подинтегральным выражением.

Теорема. Любая непрерывная функция интегрируема на любом конечном интервале $[a, b]$.

Доказательство этой теоремы можно найти в более полных учебниках анализа, ее можно распространить и на функции, которые обладают конечным набором точек разрыва (кусочно-непрерывные функции). Более полное описание множества интегрируемых функций и дальнейшее развитие теории интегрирования представляет собой достаточно сложную область анализа и может быть найдено в более продвинутых руководствах.

10.2 Геометрический смысл определенного интеграла

Определенному интегралу можно придать геометрическое истолкование. Будем для простоты считать, что $f(x) > 0$ на области определения. На рис. 7 изображено разбиение интервала $[a, b]$ на 5 подинтервалов, в четвертом указана точка x_4. Произведение $f(x_4)\Delta x_4$, входящее в интегральную сумму, соответствует площади прямоугольника высоты $f(x_4)$ с основанием Δx_4. Остальные произведения (входящие в интегральную сумму) описывают площади других прямоугольников, построенных аналогичным образом. Таким образом, интегральная сумма приблизительно описывает площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции, осью x, и прямыми $x = a$, $x = b$. При уменьшении $\Delta_\sigma = max_{1\le k\le N}\Delta x_k$ (и соответственном увеличении N) сумма площадей таких прямоугольников будет все более точно приближать площадь трапеции. Таким образом, предельное значение интегральной суммы можно по определению принять за площадь криволинейной трапеции,

$$\int_a^b f(x)dx = S_{trapeciya}.$$

10.3 Основные свойства определенного интеграла

1. Если $f(x) = M = const$, то

$$\int_a^b f(x)dx = M\cdot(b-a).$$

2. Если $f(x)$ интегрируема на интервале $[a, b]$, $k = const$, то функция $k\cdot f(x)$ также интегрируема на $[a, b]$, причем

$$\int_a^b k\cdot f(x)dx = k\cdot\int_a^b f(x)dx$$

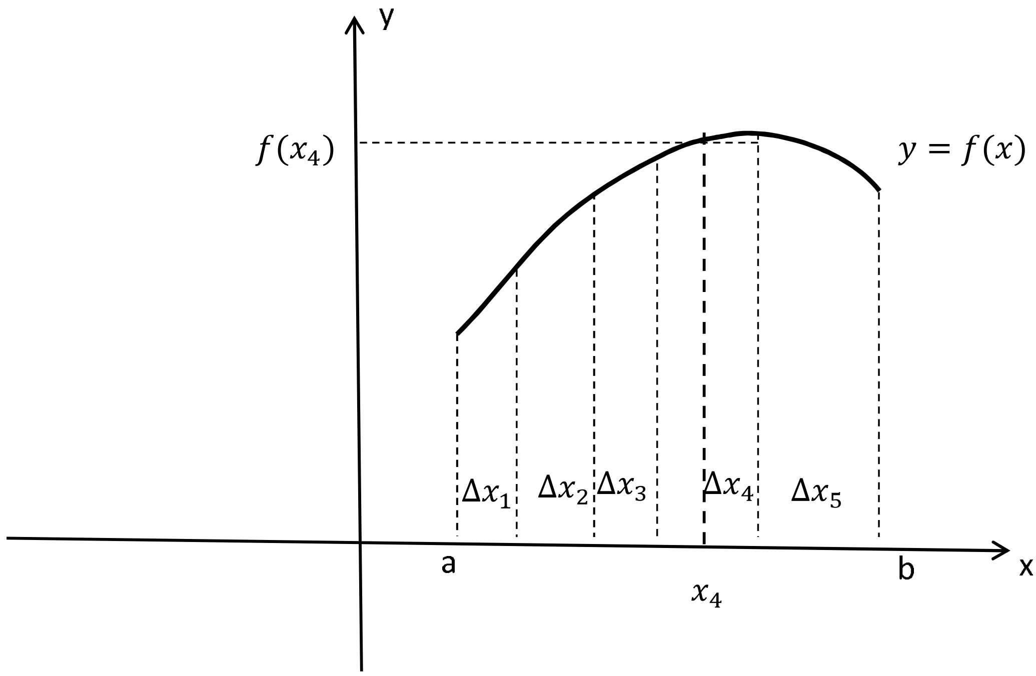

Рис. 7: Геометрический смысл определенного интеграла

(константа выносится за знак интеграла).

3. Если функции $f(x)$, $g(x)$ интегрируемы на интервале $[a, b]$, то функция $f(x) + g(x)$ также интегрируема на интервале $[a, b]$, причем

$$\int_a^b (f(x) + g(x))\, dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

(интеграл от суммы функций равен сумме интегралов от функций).

4. Если функция $f(x)$ интегрируема на интервале $[a, b]$, причем $f(x) \geq 0$ на этом интервале, то

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0$$

(интегрирование неравенств).

5. Пусть функция $f(x)$ интегрируема на конечном интервале $[a, b]$, причем для некоторых чисел m, M выполняется неравенство $m \leq f(x) \leq M$ при всех $x \in [a, b]$. Тогда

$$m(b - a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b - a)$$

(теорема об оценке интеграла).

6. Пусть $f(x)$ непрерывна на конечном интервале $[a, b]$. Тогда существует такая точка $c \in (a, b)$, что выполняется равенство

$$f(c) = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b - a}$$

(теорема об интегральном среднем).

7. Пусть функция $f(x)$ интегрируема на конечном интервале $[a, b]$. Определенный интеграл был построен выше в ситуации, когда конечные числа a, b удовлетворяют неравенству: $a < b$. По определению полагают:

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx.$$

Пусть теперь $c \in (a, b)$, тогда $f(x)$ интегрируема на подинтервалах (a, c), (c, b), причем

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Это равенство справедливо и тогда, когда c лежит вне интервала $[a, b]$ в предположении, что все интегралы существуют. Это свойство называется аддитивность интеграла по интервалу.

10.4 Формула Ньютона-Лейбница

Эта формула устанавливает связь между определенным интегралом и первообразной. Изначально эти два объекта имеют совершенно различной происхождение - первообразная возникает как решение чисто математической задачи обращения операции дифференцирования, определенный интеграл возник при решении задач с прикладным значением - вычислении площадей, объемов и т.д. Формула Ньютона-Лейбница позволяет вычислять определенные интегралы в явном аналитическом виде.

10.4.1 Интеграл как функция верхнего предела

Пусть, для простоты, $f(x)$ - непрерывная функция на интервале $[a, b]$, так что она интегрируема на любом подинтервале этого интервала. Рассмотрим новую функцию, заданную соотношением

$$F(x) = \int_a^x f(s)ds,$$

считая $x \in [a, b]$. Из интегрируемости $f(s)$ на любом подинтервале следует, что для любого $x \in [a, b]$ правая часть этого соотношения имеет смысл, так что мы действительно построили новую функцию. Обсудим ее свойства.

Теорема. Пусть $f(s)$ непрерывна на интервале $[a, b]$. Тогда $F(x)$ тоже непрерывная функция при $x \in [a, b]$.

Доказательство. Пусть $x_0 \in [a, b]$. Рассмотрим выражение

$$F(x) - F(x_0) = \int_a^x f(s)ds - \int_a^{x_0} f(s)ds.$$

Из аддитивности интеграла по интервалу следует, что

$$F(x) - F(x_0) = \int_{x_0}^x f(s)ds.$$

Далее, из непрерывности $f(x)$ на замкнутом интервале $[a, b]$ следует, что существует конечная константа $M > 0$ такая, что $-M < f(x) < M$ при всех $x \in [a, b]$. Интегрируя это неравенство по интервалу $[x_0, x]$, получаем:

$$-M(x - x_0) < \int_{x_0}^x f(s)ds < M(x - x_0).$$

В пределе при $x \to x_0$, получаем:

$$F(x) - F(x_0) = \int_{x_0}^{x} f(s)ds \to 0.$$

ч.т.д.

10.4.2 Формула Баррроу

Рассмотрим дифференциальные свойства функции

$$F(x) = \int_{a}^{x} f(s)ds,$$

полагая $f(x)$ непрерывной при всех интересующих нас x. Для этого составим отношение

$$A(x, x_0) = \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^{x} f(s)ds.$$

В силу непрерывности $f(x)$ для любого интервала $[x_0, x]$ можно применить теорему об интегральном среднем: существует точка $c \in (x_0, x)$ такая, что

$$\int_{x_0}^{x} f(s)ds = f(c) \cdot (x - x_0).$$

Таким образом, $A(x, x_0) = f(c)$. При $x \to x_0$ имеем соответственно $c \to x_0$, так что в силу непрерывности $f(x)$

$$\lim_{x \to x_0} A(x, x_0) = \lim_{x \to x_0} f(c) = f(x_0).$$

Итак, получаем **формулу Барроу**:

$$\frac{d}{dx} \int_{a}^{x} f(s)ds = f(x).$$

10.4.3 Формула Ньютона-Лейбница

Пусть $f(x)$ непрерывна при всех интересующих нас x,

$$F(x) = \int_{a}^{x} f(s)ds.$$

Тогда формула Барроу утверждает, что

$$\frac{d}{dx} F(x) = f(x),$$

т.е. $F(x)$ является первообразной функции $f(x)$. Пусть $G(x)$ - произвольная первообразная $f(x)$. Тогда из свойств первообразных следует, что $F(x)$ и $G(x)$ отличаются только на константу, $F(x) = G(x) + C$. Определим эту константу. Для этого подставим в последнее равенство $x = a$. При этом

$$F(a) = \int_{a}^{a} f(s)ds = 0,$$

так что $G(a) + C = 0$. Следовательно, $C = -G(a)$ и из наших соотношений следует:

$$\int_{a}^{x} f(s)ds = F(x) = G(x) - G(a).$$

Заменяя x на b, приходим к стандартной форме **формулы Ньютона-Лейбница**:

$$\int_a^b f(s)ds = G(x)|_a^b = G(b) - G(a).$$

Здесь $G(x)$ - произвольная первообразная функции $f(x)$.

Формула Ньютона-Лейбница позволяет вычислять определенные интегралы в явном аналитическом виде.

Пример. Вычислим интеграл

$$\int_0^a (3x^2 - x + 1)dx.$$

Первообразная от подинтегрального выражения равна $x^3 - x^2/2 + x$, так что

$$\int_0^a (3x^2 - x + 1)dx = (x^3 - x^2/2 + x)|_0^a = (a^3 - a^2/2 + a) - 0 = (a^3 - a^2/2 + a).$$

Задачи. Вычислить интегралы.

1.
$$\int_0^1 \sqrt{1+x}\,dx.$$

2.
$$\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{(7+3x)^2}.$$

3.
$$\int_2^{-6} \frac{dx}{\sqrt[3]{(3-x)^2}}.$$

4.
$$\int_0^{16} \frac{dx}{\sqrt{x+9} - \sqrt{x}}.$$

5.
$$\int_{-a}^0 \frac{(a+x)^2}{a}\,dx.$$

6.
$$\int_0^{\pi/2} \sin x \cos 3x\,dx.$$

7.
$$\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^4 x}.$$

8.
$$\int_0^{1/4} \frac{dx}{\sqrt{x - x^2}}.$$

9.
$$\int_0^{13} \frac{x+1}{\sqrt[3]{2x+1}}dx.$$

10.
$$\int_{ln2}^{ln3} \frac{e^{2x}}{e^x - e^{-x}}dx.$$

10.5 Интегрирование по частям в определенном интеграле

Пусть на отрезке $[a, b]$ даны две функции $f(x)$, $g(x)$, дифференцируемые на этом интервале. Выпишем формулу Лейбница для них:

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

Интегрируя это равенство по интервалу, получаем:

$$\int_a^b (f'(x)g(x) + f(x)g'(x))\,dx = \int_a^b (f(x)g(x))'\,dx = f(b)g(b) - f(a)g(a).$$

Переписывая, получаем:

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f(x)g'(x)dx.$$

Это и есть формула интегрирования по частям в определенном интеграле.

10.6 Замена переменной в определенном интеграле

Теорема. Пусть $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, функция $\phi(t)$ взаимно-однозначно отображает интервал $[\alpha, \beta]$ на интервал $[a, b]$, причем $\phi'(t)$ непрерывна на интервале $[\alpha, \beta]$. Тогда

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\phi(t))\,\phi'(t)dt.$$

Доказательство. Пусть $F(x)$ - первообразная функции $f(x)$, тогда, как следует из правила дифференцирования сложной функции, $F(\phi(t))$ является первообразной функции $f(\phi(t))\,\phi'(t)$. Согласно формуле Ньютона-Лейбница,

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(\phi(\beta)) - F(\phi(\alpha)),$$

$$\int_\alpha^\beta f(\phi(t))\,\phi'(t)dt = F(\phi(\beta)) - F(\phi(\alpha)).$$

Сравнивая, получаем нашу формулу. ч.т.д.

11 Несобственные интегралы

Определенный интеграл

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

был построен в предположении, что числа a, b конечны и $f(x)$ - непрерывная функция. Если одно из этих предположений нарушается, говорят о несобственных интегралах.

11.1 Несобственные интегралы 1 рода

Несобственный интеграл 1 рода возникает, когда по крайней мере одно из чисел a, b бесконечно.

11.1.1 Определение и основные свойства

Рассмотрим сначала ситуацию, когда нижний предел интегрирования конечен, а верхний равен $+\infty$, другие варианты обсудим несколько позднее. Для $f(x)$, непрерывной при всех интересующих нас x, рассмотрим интеграл

$$I = \int_a^{+\infty} f(x)dx. \tag{19}$$

Прежде всего надо установить смысл этого выражения. Для этого введем функцию

$$I(N) = \int_a^N f(x)dx$$

и рассмотрим ее поведение при $N \to +\infty$.

Определение. Пусть существует конечный предел

$$A = \lim_{N\to+\infty} I(N) = \lim_{N\to+\infty} \int_a^N f(x)dx.$$

Тогда говорят, что несобственный интеграл 1 рода (19) является сходящимся и ему приписывают значение A, саму функцию называют интегрируемой на интервале $[a, +\infty)$. Если же указанного предела не существует или он равен $\pm\infty$, то говорят, что интеграл (19) расходится.

Пример. Рассмотрим интеграл

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}.$$

Положим

$$I(N) = \int_0^N \frac{dx}{1+x^2}.$$

В данном случае известна первообразная подинтегральной функции, так что

$$I(N) = \int_0^N \frac{dx}{1+x^2} = arctgx|_0^N = arctgN.$$

Известно, что $arctgN \to \pi/2$ при $N \to +\infty$. Таким образом, $I(N)$ имеет конечный предел, наш несобственный интеграл сходится и равен $\pi/2$.

Сходящиеся несобственные интегралы 1 рода обладают всеми стандартными свойствами обычных определенных интегралов.

1. Если $f(x)$, $g(x)$ интегрируемы на интервале $[a, +\infty)$, то их сумма $f(x) + g(x)$ также интегрируема на этом интервале, причем

$$\int_a^{+\infty} (f(x) + g(x))\,dx = \int_a^{+\infty} f(x)dx + \int_a^{+\infty} g(x)dx.$$

2. Если $f(x)$ интегрируема на интервале $[a, +\infty)$, то для любой константы C функция $C \cdot f(x)$ также интегрируема на этом интервале, причем

$$\int_a^{+\infty} C \cdot f(x)dx = C \cdot \int_a^{+\infty} f(x)dx.$$

3. Если $f(x)$ интегрируема на интервале $[a, +\infty)$, причем на этом интервале $f(x) > 0$, то
$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \; > \; 0.$$
4. Если $f(x)$ интегрируема на интервале $[a, +\infty)$, то для любого $b > a$ интеграл
$$\int_b^{+\infty} f(x)dx$$
сходится, причем
$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^{+\infty} f(x)dx$$
(аддитивность интеграла по интервалу).

Справедливы также формулы замены переменной, интегрирования по частям и т.д. (с естественными оговорками).

Пример. Рассмотрим интеграл
$$I = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^k}\, dx. \tag{20}$$
Введем функцию
$$I(N) = \int_1^N \frac{1}{x^k}\, dx.$$
В данном случае первообразная известна, так что
$$I(N) = \int_1^N \frac{1}{x^k}\, dx \; = \frac{x^{1-k}}{1-k}|_1^N = \frac{N^{1-k}}{1-k} - \frac{1}{1-k}$$
при $k \neq 1$,
$$I(N) = \int_1^N \frac{1}{x}\, dx \; = lnx|_1^N = lnN$$
при $k = 1$. Рассматривая поведение при $N \to +\infty$, приходим к выводу, что интеграл (20) сходится при $k > 1$, а при $k \leq 1$ - расходится.

Рассмотрим теперь вариант, когда нижний предел интегрирования равен $-\infty$, а верхний конечен, т.е. рассмотрим интегралы
$$I = \int_{-\infty}^a f(x)dx.$$
Однако этот вариант можно свести к предыдущему, если сделать замену переменных $x = -s$ и поменять затем пределы интегрирования местами, так что
$$I = \int_{-a}^{+\infty} g(s)ds,$$
$g(s) = f(-s)$. Рассмотрим теперь случай, когда имеется два бесконечных предела, т.е. интеграл
$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx, \tag{21}$$

причем $f(x)$ непрерывна при всех $x \in \mathbb{R}$. Разобъем интервал на две части: возьмем $c \in \mathbb{R}$, и рассмотрим два интеграла,

$$I_1 = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx, \quad I_2 = \int_{c}^{+\infty} f(x)dx.$$

Определение. Если оба интеграла I_1, I_2 сходятся, то интеграл (21) называется сходящимся, ему приписывают значение $I = I_1 + I_2$ (в соответствии с аддитивностью по интервалу). Если хотя бы один из интегралов I_1, I_2 расходится, интеграл (21) называется расходящимся.

Можно доказать, что сходимость интеграла (21) не зависит от выбора точки c.

Несобственные интегралы 1 рода с интервалами интегирования $(-\infty, c]$ или $(-\infty, +\infty)$ также обладают всеми стандартными свойствами определенных интегралов (с соответствующей переформулировкой, учитывающей выбор интервал интегрирования).

11.1.2 Признаки сходимости несобственных интегралов 1 рода

Теорема (первый признак сравнения). Пусть $f(x)$, $g(x)$ - непрерывны при $x > a$, причем $0 < f(x) < g(x)$ при $x > a$. Тогда

1. Если интеграл
$$\int_{a}^{+\infty} g(x)dx$$
сходится, то сходится и интеграл
$$\int_{a}^{+\infty} f(x)dx.$$

2. Если интеграл
$$\int_{a}^{+\infty} f(x)dx$$
расходится, то расходится и интеграл
$$\int_{a}^{+\infty} g(x)dx.$$

Теорема (второй признак сравнения). Пусть $f(x)$, $g(x)$ - непрерывны и положительны при $x > a$, причем существует конечный предел

$$\theta = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}, \quad \theta \neq 0, +\infty.$$

Тогда интегралы

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)dx, \quad \int_{a}^{+\infty} g(x)dx$$

сходятся или расходятся одновременно.

Пример. Рассмотрим интеграл

$$I = \int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x + \sin x}\, dx.$$

Подинтегральное выражение - положительная функция на интервале интегрирования. Далее, при $x \to +\infty$ имеем: $\sin x$ является "малой"поправкой в знаменателе. Точнее, если взять $f(x) = 1/(x + \sin x)$, $\quad g(x) = 1/x$, то

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x + \sin x} = 1.$$

Применяя второй признак сравнения, приходим к выводу, что наш интеграл сходится или расходится одновременно с интегралом

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\, dx.$$

Как было показано в предыдущем примере, этот интеграл расходится ($k = 1$). Следовательно, исходный интеграл расходится.

Задачи. Вычислить несобственный интеграл или установить его сходимость (расходимость).

1. $$\int_0^{+\infty} e^{-ax}\, dx.$$

2. $$\int_0^{+\infty} xe^{-x^2}\, dx.$$

3. $$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2xdx}{x^2+1}.$$

4. $$\int_0^{+\infty} \frac{xdx}{(x+2)^3}.$$

5. $$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}.$$

6. $$\int_1^{+\infty} \frac{lnx}{x^2}\, dx.$$

7. $$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}.$$

8. $$\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}}\, dx.$$

9. $$\int_0^{+\infty} e^{-ax} \cos x\, dx.$$

10. $$\int_0^{+\infty} \frac{xdx}{x^3+1}.$$

11.2 Несобственные интегралы 2 рода

Если подинтегральная функция имеет на (конечном) интервале интегрирования разрыв второго рода, говорят о несобственном интеграле второго рода.

11.2.1 Определение и основные свойства

Обозначим интервал интегрирования $[a,\, b]$, оба этих числа ниже полагаются конечными. Если имеется всего 1 разрыв, он может находиться или в точке a, или в точке b, или внутри интервала $(a,\, b)$. Рассмотрим сначала случай, когда разрыв второго рода имеется в точке a, а в остальных точках подинтегральная функция непрерывна. Итак, мы обсуждаем интеграл

$$I = \int_a^b f(x)\, dx, \tag{22}$$

причем $f(x) \to \infty$, когда $x \to a+0$. Как и ранее, прежде всего следует придать смысл этому выражению. Для этого рассмотрим интеграл

$$I(\epsilon) = \int_{a+\epsilon}^b f(x)\, dx.$$

Определение. Пусть существует конечный предел

$$A = \lim_{\epsilon\to+0} I(\epsilon) = \lim_{\epsilon\to+0} \int_{a+\epsilon}^b f(x)\, dx.$$

Тогда говорят, что несобственный интеграл второго рода (22) сходится, и ему приписывают значение A, саму функцию $f(x)$ называют интегрируемой на интервале $[a,\, b]$.

Пример. Рассмотрим интеграл

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}.$$

Подинтегральная функция $1/\sqrt{x}$ при $x \to +0$ имеет бесконечный предел, так что в точке $x = 0$ она имеет разрыв второго рода. Положим

$$I(\epsilon) = \int_\epsilon^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}\,.$$

В данном случае первообразная известна,

$$I(\epsilon) = \int_\epsilon^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}|_\epsilon^1 = 2(1-\sqrt{\epsilon}) \to 2$$

при $\epsilon \to +0$. Таким образом, исходный интеграл является сходящимся несобственным интегралом второго рода, причем он равен 2.

Рассмотрим вариант, когда разрыв второго рода подинтегральной функции имеется на верхнем пределе интервала интегрирования. Этот случай можно свести к предыдущему, сделав замену переменной $x = -t$ и затем переставив пределы интегрирования.

Рассмотрим вариант, когда разрыв второго рода у подинтегральной функции имеется внутри интервала интегрирования, в точке $c \in (a,\, b)$. В данном случае исходный интеграл

$$I = \int_a^b f(x)\, dx \tag{23}$$

представляют в виде суммы

$$I = I_1 + I_2, \quad I_1 = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^d f(x)\,dx.$$

Определение. Если оба интеграла I_1, I_2 сходятся, то несобственный интеграл (23) называют сходящимся и ему приписывают значение, равное сумме интегралов I_1, I_2, функцию $f(x)$ называют интегрируемой на интервале $[a, b]$. Если хотя бы один из интегралов I_1, I_2 является расходящимся, несобственный интеграл (23) называют расходящимся.

Сходящиеся несобственные интегралы 2 рода обладают всеми стандартными свойствами обычных определенных интегралов.

1. Если $f(x)$, $g(x)$ интегрируемы на интервале $[a, b]$, то их сумма $f(x) + g(x)$ также интегрируема на этом интервале, причем
$$\int_a^b (f(x) + g(x))\,dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$
2. Если $f(x)$ интегрируема на интервале $[a, b]$, то для любой константы C функция $C \cdot f(x)$ также интегрируема на этом интервале, причем
$$\int_a^b C \cdot f(x)dx = C \cdot \int_a^b f(x)dx.$$
3. Если $f(x)$ интегрируема на интервале $[a, b]$, причем на этом интервале $f(x) > 0$, то
$$\int_a^b f(x)dx\ >\ 0.$$
4. Если $f(x)$ интегрируема на интервале $[a, b]$, то для любого $c \in (a, b)$ интегралы
$$\int_a^c f(x)dx, \quad \int_c^b f(x)dx$$
тоже сходятся, причем
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$
(аддитивность интеграла по интервалу).

Пример. Рассмотрим интеграл

$$I = \int_0^1 \frac{1}{x^k}\,dx. \tag{24}$$

Если $k > 0$, подинтегральная функция стремится к ∞ при $x \to +0$, так что интеграл - несобственный второго рода. Введем функцию

$$I(\epsilon) = \int_\epsilon^1 \frac{1}{x^k}\,dx.$$

В данном случае первообразная известна, так что

$$I(\epsilon) = \int_\epsilon^1 \frac{1}{x^k}\,dx\ = \frac{x^{1-k}}{1-k}|_\epsilon^1 = \frac{1}{1-k} - \frac{\epsilon^{1-k}}{1-k}.$$

при $k \neq 1$,

$$I(\epsilon) = \int_\epsilon^1 \frac{1}{x}\,dx\ = lnx|_\epsilon^1 = -ln\epsilon.$$

при $k = 1$. Рассматривая поведение при $\epsilon \to +0$, приходим к выводу, что интеграл (20) сходится при $k < 1$, а при $k \geq 1$ - расходится.

11.2.2 Признаки сходимости несобственных интегралов 2 рода

Будем для определенности считать, что разрыв второго рода у функции $f(x)$ имеется в точке a.

Теорема (первый признак сравнения). Пусть $f(x)$, $g(x)$ - непрерывны при $x \in (a, b)$, причем $0 < f(x) < g(x)$ при $x \in (a, b)$. Тогда

1. Если интеграл
$$\int_a^b g(x)dx$$
сходится, то сходится и интеграл
$$\int_a^b f(x)dx.$$

2. Если интеграл
$$\int_a^b f(x)dx$$
расходится, то расходится и интеграл
$$\int_a^b g(x)dx.$$

Теорема (второй признак сравнения). Пусть $f(x)$, $g(x)$ - непрерывны и положительны при $x \in (a, b)$, причем существует конечный предел

$$\theta = \lim_{x \to a+0} \frac{f(x)}{g(x)}, \quad \theta \neq 0, +\infty.$$

Тогда интегралы
$$\int_a^b f(x)dx, \quad \int_a^b g(x)dx$$
сходятся или расходятся одновременно.

Пример. Рассмотрим интеграл

$$I = \int_0^1 \frac{1}{x + \sin x}\, dx.$$

Подинтегральное выражение - положительная функция на интервале интегрирования, подинтегральная функция стремится к ∞ при $x \to +0$, так что наш интеграл - несобственный второго рода. Далее, при $x \to +0$ имеем: если $g(x) = 1/x$, то

$$\lim_{x \to +0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to +0} \frac{x}{x + \sin x} = \frac{1}{2} \neq 0, \infty\,.$$

Применяя второй признак сравнения, приходим к выводу, что наш интеграл сходится или расходится одновременно с интегралом

$$\int_0^{+1} \frac{1}{x}\, dx.$$

Как было показано в предыдущем примере, этот интеграл расходится ($k = 1$). Следовательно, исходный интеграл тоже расходится.

Задачи. Вычислить несобственный интеграл или установить его сходимость (расходимость).

1.
$$\int_0^1 \frac{dx}{x^3 - 5x^2}\,.$$

2.
$$\int_3^7 \frac{x\,dx}{(x-5)^2}\,.$$

3.
$$\int_0^1 \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}\,.$$

4.
$$\int_0^1 \frac{x^3\,dx}{1-x^5}\,.$$

5.
$$\int_{-3}^2 \frac{dx}{(x+3)^2}\,.$$

6.
$$\int_1^2 \frac{x^2\,dx}{(x-1)\sqrt{x-1}}\,.$$

7.
$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x+x^2}}\,.$$

8.
$$\int_0^{1/4} \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}\,.$$

9.
$$\int_1^2 \frac{dx}{xlnx}\,.$$

10.
$$\int_1^2 \frac{x^3\,dx}{\sqrt{4-x^2}}\,.$$

11.
$$\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\sin^4 x}\,.$$

12 Интегралы, зависящие от параметра

Рассмотрим определенный интеграл

$$I(\alpha) = \int_a^b f(x,\alpha)dx \tag{25}$$

в котором подинтегральная функция зависит от параметра α. Возникают естественные вопросы - какими свойствами обладает функция $I(\alpha)$? Например, является ли она непрерывной, дифференцируемой, как вычислять ее производную и т.д.

Теорема. 1. Пусть функция $f(x,\alpha)$ непрерывно зависит от переменных x и α, при $x \in [a,\, b]$, $\alpha \in (\alpha_1,\, \alpha_2) \subset \mathbb{R}$. Тогда функция $I(\alpha)$ непрерывна при $\alpha \in (\alpha_1,\, \alpha_2)$.

2. Пусть функции $f(x,\alpha)$, $f'_\alpha(x,\alpha)$ непрерывно зависят от переменных x и α, $x \in [a,\, b]$, $\alpha \in (\alpha_1,\, \alpha_2) \subset \mathbb{R}$. Тогда функция $I(\alpha)$ дифференцируема при $\alpha \in (\alpha_1,\, \alpha_2)$, причем

$$\frac{dI}{d\alpha}(\alpha) = \int_a^b f'_\alpha(x,\alpha)dx\,.$$

Зависимыми от параметра могут быть и пределы интегрирования, т.е. вместе с интегралом (25) могут возникать и интегралы

$$I(\alpha) = \int_{a(\alpha)}^{b(\alpha)} f(x,\alpha)dx. \tag{26}$$

Теорема. 1. Пусть функции $f(x,\alpha)$, $a(\alpha)$, $b(\alpha)$ непрерывно зависит от переменных x и α, при всех интересующих нас x, $\alpha \in (\alpha_1,\, \alpha_2) \subset \mathbb{R}$, . Тогда функция $I(\alpha)$ непрерывна при $\alpha \in (\alpha_1,\, \alpha_2)$.

2. Пусть функции $f(x,\alpha)$, $f'_\alpha(x,\alpha)$ непрерывно зависят от переменных x и α, при всех интересующих нас x, $\alpha \in (\alpha_1,\, \alpha_2) \subset \mathbb{R}$. Тогда функция $I(\alpha)$ дифференцируема при $\alpha \in (\alpha_1,\, \alpha_2)$, причем

$$\frac{dI}{d\alpha}(\alpha) = b'(\alpha)f(b(\alpha),\alpha) - a'(\alpha)f(a(\alpha),\alpha) + \int_{a(\alpha)}^{b(\alpha)} f'_\alpha(x,\alpha)dx\,.$$

13 Приложения определенных интегралов

13.1 Площадь плоских фигур

Первое приложение определенных интегралов уже упоминалось выше - это вычисление площади плоских фигур. Рассмотрим сначала случай, когда фигура представлена в декартовой системе координат. Пусть фигура ограничена кривыми $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, при $a \le x \le b$, и прямыми $x = a, \quad x = b$, см. рис.8, тогда ее площадь равна

$$S = \int_a^b \left(f_1(x) - f_2(x)\right)\, dx.$$

Рассмотрим теперь случай, когда фигура представлена в полярной системе координат. Пусть ее ограничивают лучи $\varphi = \varphi_1$, $\varphi = \varphi_2$, и линия $r = R(\varphi)$, см. рис.9. Площадь маленького треугольника с углом $\Delta\varphi$ при вершине приближенно равна $\Delta S = (r^2/2)\sin(\Delta\varphi)$. Складывая, получаем интегральную сумму

$$\Sigma = \sum_k \frac{r_k^2}{2}\sin(\Delta\varphi_k).$$

Полагая $\Delta\varphi_k \to 0$ можно $\sin(\Delta\varphi_k)$ можно заменить на $\Delta\varphi_k$ (тригонометрический замечательный предел!) и в пределе получаем:

$$S = \frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} R^2(\varphi)d\varphi\,.$$

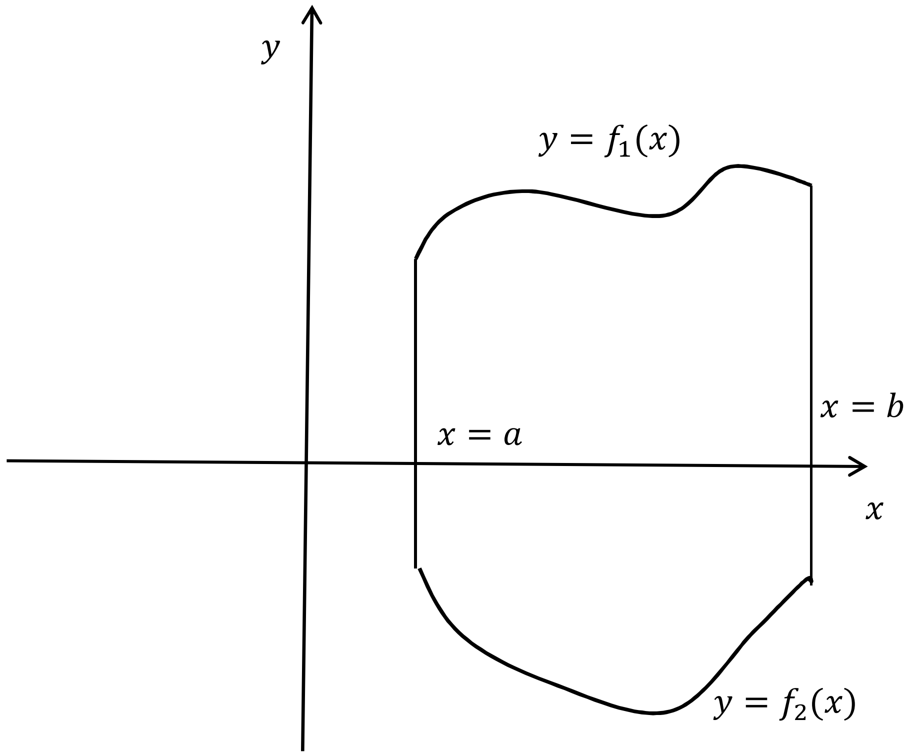

Рис. 8: Площадь фигуры в декартовой системе координат.

Пример. Вычислим площадь эллипса - плоской фигуры, граница которой образует кривая, удовлетворяющая уравнению

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

величины a, b называются полуосями эллипса. Эллипс - симметричная фигура, так что мы будем вычислять площадь "четверти"эллипса, той ее части, для которой $x \geq 0$, $y \geq 0$, и умножим ее на 4. Уравнение кривой

$$y=\sqrt{b^2-\frac{b^2x^2}{a^2}}, \quad x \in [0,\, a]\,,$$

мы вычисляем площадь под этой кривой (площадь "четверти"эллипса), так что согласно нашим формулам,

$$S=4\cdot\int_0^a\sqrt{b^2-\frac{b^2x^2}{a^2}}\,dx=4b\int_0^a\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\,dx.$$

Подстановка $x=a\sin t$, $dx=a\cos t$ позволяет закончить вычисление интеграла:

$$S=4ab\int_0^{\pi/2}\cos^2 t\,dt=4ab\int_0^{\pi/2}\frac{1+\cos 2t}{2}\,dt=4ab\left(\frac{t}{2}+\frac{\sin 2t}{4}\right)\Big|_0^{\pi/2}=\pi ab.$$

При $a=b=r$ получаем школьную формулу для площади круга.

Задачи.

1. Найти площадь, ограниченную кривыми $y=x^2-4$ и $x-y+8=0$.

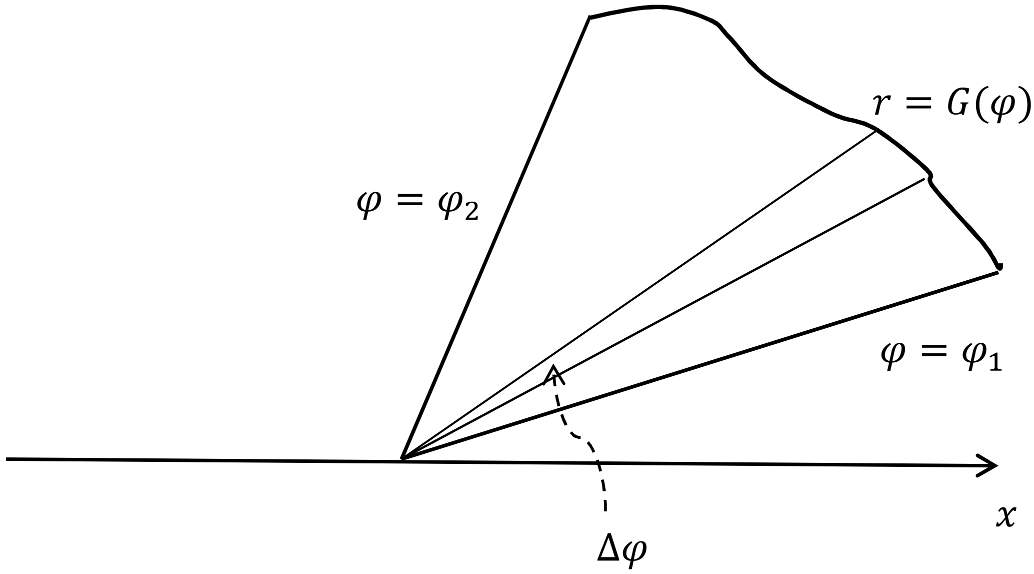

Рис. 9: Площадь фигуры в полярной системе координат.

2. Найти площадь, ограниченную кривыми $xy = 2$ и $x + 2y = 5$.

3. Найти площадь, ограниченную кривыми $y = e^x, \quad y = e^{-x}, \quad x = 1$.

4. Найти площадь, ограниченную кривыми $y^2 = 3x, \quad x^2 = 3y$.

5. Найти площадь, ограниченную кривыми $x^2 = 4y, \quad y = 8/(x^2 + 4)$.

6. Найти площадь, ограниченную кривой $r = a\sin(3\varphi)$.

7. Найти площадь, ограниченную кривой $x = 3(t - \sin t), \quad y = 3(1 - \cos t)$, где $0 < t < 2\pi$, и осью OX.

8. Найти площадь, ограниченную кривой $(x^2 + y^2)^5 = a^6x^3y$.

9. Найти площадь, ограниченную кривыми $r = 2(1 - \cos\varphi), \quad r = \varphi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

13.2 Длина дуги кривой

Рассмотрим сначала кривую в n-мерном пространстве. Пусть ее точки параметризованы параметром t, так что их координаты можно выразить как функции этого параметра, $(x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t))$, эти функции будем считать дифференцируемыми. Сам параметр t принимает значения в интервале $[T_1, T_2]$, рис.10. Заменим кривую на ломаную - набор примыкающих друг к другу отрезков, на рис.10 отмечен один из них. Пусть длина этого отрезка

$$\Delta s = \sqrt{(\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2 + ... + (\Delta x_n)^2}.$$

Для каждого выражения Δx_m можно применить формулу Лагранжа, так что $\Delta x_m = x'_m(t_k)\Delta t_k$ для некоторой точки t_k. Складывая подобные выражения для всех отрезков ломаной, получаем длину ломаной - интегральную сумму:

$$L \approx \sum_{k=1}^{N} \Delta s_k = \sum_{k=1}^{N} \Delta t_k \sqrt{(x'_1(t_k))^2 + (x'_2(t_k))^2 + ... + (x'_n(t_k))^2}.$$

Переходя к пределу $max_k \Delta t_k \to 0$, получаем интеграл, выражающий длину кривой:

$$L = \int_{T_1}^{T_2} dt \sqrt{(x_1'(t))^2 + (x_2'(t))^2 + ... + (x_n'(t))^2}. \tag{27}$$

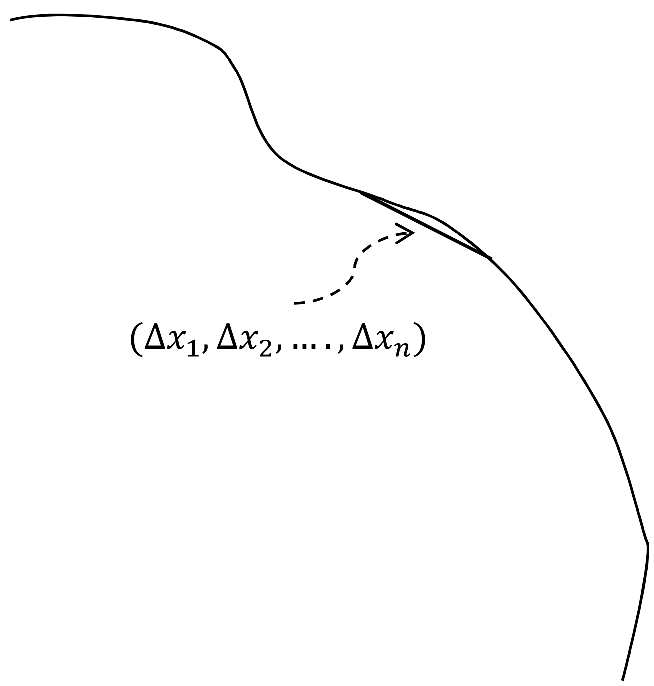

Рис. 10: Длина кривой.

Рассмотрим теперь варианты параметризации.

1. Плоская кривая ($n = 2$) в декартовых координатах. В этом случае обычно кривую задают соотношением $y = f(x)$, так что в качестве параметра t выступает переменная $x \in [a, b]$. При этом $x_1 = x, \quad x_2 = y, T_1 = a, T_2 = b$. Отсюда следует: $dx_1/dt = 1, \quad dx_2/dt = f'(x)$, так что в этом случае

$$L = \int_a^b dx \sqrt{1 + (f'(x))^2}.$$

2. Плоская кривая ($n = 2$) в полярных координатах. В этом случае кривую обычно задают соотношением $r = R(\varphi)$, $\varphi \in [A, B]$. При этом $x_1 = x = r\cos\varphi, \quad x_2 = y = r\sin\varphi$, в качестве параметра t выступает переменная φ. Вычисляем $dx_1/dt = dx/d\varphi = \cos\varphi \cdot dR/d\varphi - R \cdot \sin\varphi$, $dx_2/dt = dy/d\varphi = \sin\varphi \cdot dR/d\varphi + R \cdot \cos\varphi$. Подставляя в (27), получаем:

$$L = \int_A^B d\varphi \sqrt{R^2(\varphi) + (R'(\varphi))^2}.$$

Задачи.

1. Найти длину дуги кривой $y = ln(1 - x^2)$ от $x = 0$ до $x = 1/2$.
2. Найти длину дуги кривой $y^2 = (1 + x)^3$ от $x = 0$ до $x = 3$.
3. Найти длину дуги астроиды $y = 2\sin^3 t, \quad x = 2\cos^3 t$.
4. Найти длину дуги кардиоиды $r = 3(1 - \cos\varphi)$.
5. Найти длину первого витка спирали Архимеда $r = a\varphi, \quad a > 0$.

13.3 Вычисление объема тел

С помощью определенного интеграла можно вычислять объем тела. Рассмотрим тело, расположенное вдоль оси x, от точки a до точки b. Предположим, что известна $S(x)$ - площадь сечения тела плоскостью, перпендикулярной оси x. Нарежем наше тело на "блинчики"плоскостями, перпендикулярными оси x, на рис. 11 изображен один такой "блинчик"толщины Δx. Объем такого "блинчика"приближенно равен $S(x)\Delta x$. Склады-

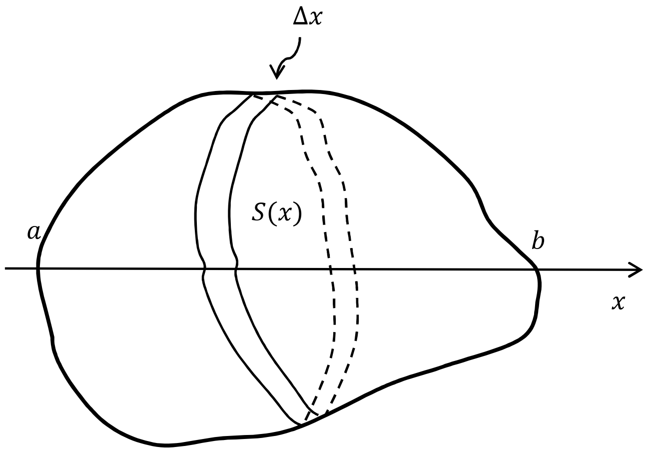

Рис. 11: Объем тела.

вая объемы таких "блинчиков получаем приближенно объем тела - интегральную сумму вида

$$\Sigma = \sum_{k=1}^{N} S(x_k)\Delta x_k \,.$$

Переходя к пределу при $max_k \Delta x_k \to 0$, получаем интеграл, который и принимается (по определению) за объем тела:

$$V = \int_a^b S(x)dx \,.$$

Если тело получено вращением кривой $y = f(x)$ вокруг оси x, площадь поперечного сечения нетрудно вычислить: $S(x) = 2\pi f^2(x)$, так что для объема тела вращения получаем

$$V = 2\pi \int_a^b f^2(x)dx \,.$$

Пример. Вычислим объем эллипсоида - тела, границу которой составляет поверхность с уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Рассмотрим сечение этого тела плоскостью, перпендикулярной оси x. Для этого достаточно фиксировать $x, x \in [-a,\, a]$ и рассмотреть уравнение границы соответствующей фигуры,

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2}.$$

Это уравнение несложно переписать в виде

$$\frac{y^2}{b^2(1 - \frac{x^2}{a^2})} + \frac{z^2}{c^2(1 - \frac{x^2}{a^2})} = 1,$$

и опознать в этой фигуре эллипс на плоскости (y,z) с полуосями $b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$, $\quad c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$. Площадь эллипса мы вычисляли выше, так что, в соответствии с полученными выше результатами, площадь поперечного сечения эллипсоида равна

$$S(x) = \pi bc \cdot \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right).$$

Таким образом, объем эллипсоида равен

$$V = \int_{-a}^{a} S(x)\,dx = \pi bc \cdot \int_{-a}^{a} \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)\,dx = \pi bc \cdot \left(x - \frac{x^3}{3a^2}\right)|_{-a}^{a} = \frac{4}{3}\pi abc.$$

Задачи.

1. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси x фигуры, ограниченной параболами $y = x^2$ и $y^2 = x$. $y = ln(1-x^2)$ от $x = 0$ до $x = 1/2$.
2. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси y фигуры, ограниченной параболами $y = x^2$ и $y = 2 - x^2$.
3. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси x фигуры, ограниченной кривыми $y = (1+x^2)^{-1}$, $y = x/2$ и $x = 0$.
4. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси x кривой $y = \sin x$, $0 \le x \le \pi$.
5. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси y фигуры, ограниченной параболами $y = 2x - x^2$ и $y = 0$.

13.4 Приложения в механике

С помощью определенного интеграла выражаются многие механические характеристики распределенных в пространстве объектов - такие, как масса, работа заданных сил, кинетическая энергия тела, момент инерции тела, координаты центра масс и т.д.

1. Положение центра масс нити с заданной плотностью.

Пусть в 3-мерном пространстве задана нить $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $t \in [t_1, t_2]$, причем линейная плотность нити задается функцией $\rho(t)$. Определим положение центра масс - вычислим его координаты. Для этого разобъем нить на малые кусочки и заменим каждый такой кусочек звеном ломаной, которому соответствует подинтервал переменной t, $[t_k, t_k + \Delta t_k]$. Длина этого звена ломаной $\Delta s_k = \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2 + (\Delta z_k)^2}$, а масса $\Delta m_k = \rho(\widetilde{t_k})\sqrt{(x'(\widetilde{t_k}))^2 + (y'(\widetilde{t_k}))^2 + (z'(\widetilde{t_k}))^2}\Delta t_k$, здесь мы использовали формулу Лагранжа для интервала $[t_k, t_k + \Delta t_k]$, $\widetilde{t_k} \in [t_k, t_k + \Delta t_k]$. Умножая на значение координаты $x(\widetilde{t_k})$, и суммируя по k, получаем интегральную сумму. Переходя к пределу в этой интегральной сумме (уменьшая максимальный интервал разбиения), получаем, что положение x-координаты центра массы, x_c, определяется из условия

$$Mx_c = \int_{t_1}^{t_2} x(t)\rho(t)\sqrt{(x'(t_k))^2 + (y'(t_k))^2 + (z'(t_k))^2}dt,$$

где интеграл является пределом построенной выше интегральной суммы,

$$M = \int_{t_1}^{t_2} \rho(t)dt$$

- масса нити. В итоге:

$$x_c = \frac{\int_{t_1}^{t_2} x(t)\rho(t)\sqrt{(x'(t_k))^2 + (y'(t_k))^2 + (z'(t_k))^2}dt}{\int_{t_1}^{t_2} \rho(t)dt}.$$

Выражения для y_c, z_c выглядят аналогично, следует заменить букву x на y, z соответственно.

2. Момент инерции нити с заданной плотностью относительно заданной оси.

Рассмотрим нить, заданную на плоскости уравнением $y = f(x)$, с плотностью $\rho(x)$, причем $x \in [a, b]$. Вычислим ее момент относительно оси x. Выделим на нити один кусочек, такой, что его левый край соответствует точке $x = x_k$, а правый - точке $x = x_k + \Delta x$, заменим этот кусочек отрезком ломаной, и вычислим момент инерции этого отрезка ломаной относительно оси x. Масса этого кусочка равна $\rho(x)\Delta s$, где Δs - длина этого звена ломаной. Расстояние до оси x приблизительно равно $y_k = f(x_k)$, так что момент инерции этого звена ломаной относительно оси x равен

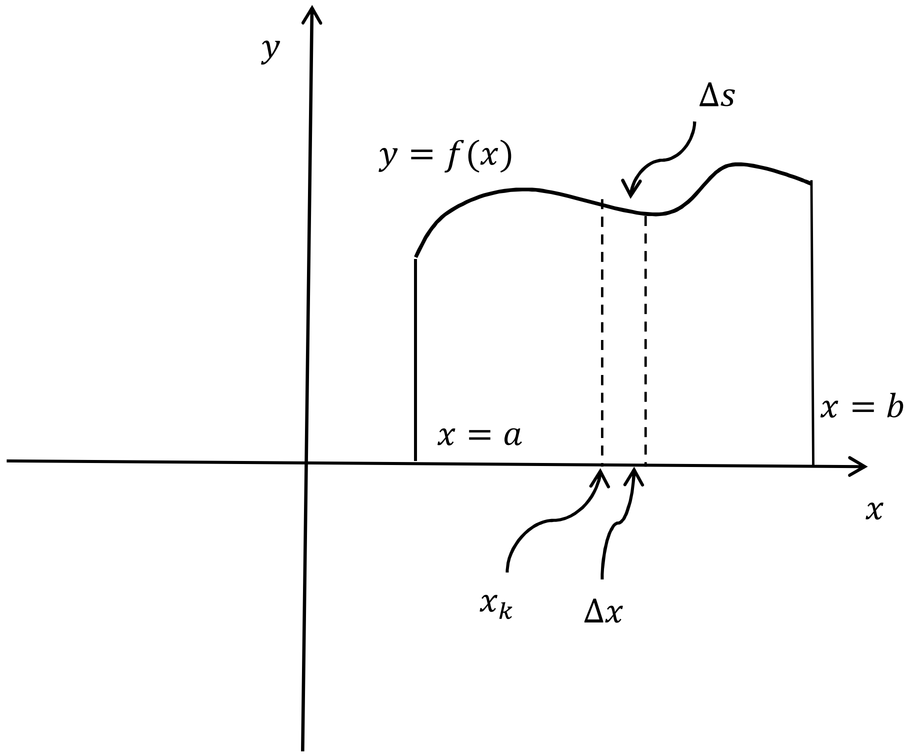

Рис. 12: Момент инерции массивной нити.

$$\Delta I_k = f^2(x_k)\rho(x)\Delta s = f^2(x_k)\rho(x)\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = f^2(x_k)\rho(x)\sqrt{1 + (f'(\widetilde{x}_k))^2}\Delta x,$$

где $\widetilde{x}_k \in [x_k, x_k + \Delta x]$, и мы использовали формулу Лагранжа для $f(x)$ на интервале $[x_k, x_k + \Delta x]$. Суммируя по всем кусочкам и переходя к пределу в этой интегральной сумме (уменьшая максимальный интервал разбиения), получим:

$$I = \int_a^b f^2(x)\rho(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}dx.$$

Задачи.

1. Найти кооординаты центра масс (полагая распределение масс равномерным)
а) симметричного параболического сегмента с основанием a и высоты h;
б) дуги окружности радиуса R, стягивающей центральный угол α.
2. Найти момент инерции (полагая распределение масс равномерным)
а) полукруга радиуса R относительно его диаметра;
б) конуса с радиусом основания R, высоты H, относительно его оси;
в) шара радиуса R относительно его диаметра.